Л. В. Агамиров

Сопротивление материалов

Краткий курс

Для студентов вузов

УДК 539.3/.4 (075.8)
ББК 30.121 я73
А23

Учебное издание

Агамиров Левон Владимирович
Сопротивление материалов.
Краткий курс
Для студентов вузов

Редактор *С.А. Минин.* Технический редактор *Т.П. Тимошина.*
Корректор *И.Н. Мокина.* Компьютерная верстка *Е.М. Илюшина.*

Подписано в печать 21.11.02. Формат 60х90/16
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл. печ. л. 16,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 65.

Общероссийский классификатор
продукции ОК-005-93, т. 2; 953005 – литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.11.953. П. 002870.10.01. от 25.10.2001 г.

ООО «Издательство Астрель»
143900, Московская обл., г. Балашиха, пр-т Ленина, 81

ООО «Издательство АСТ»
368560, Республика Дагестан, Каякентский р-н, сел. Новокаякент, ул. Новая, 20

Наши электронные адреса:
www.ast.ru
e-mail: cars@astgroup.ru

ФГУП Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 170040, г. Тверь, проспект 50-летия Октября, 46.

Агамиров Л.В.

А23 Сопротивление материалов: Краткий курс. Для студентов вузов / Л.В. Агамиров – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003. – 256 с.: ил.

ISBN 5-17-016164-6 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-271-05429-2 (ООО «Издательство Астрель»)

В книге рассматриваются основные разделы курса «Сопротивление материалов», предусмотренные образовательным стандартом РФ: растяжение и сжатие, сдвиг (срез), кручение, плоский прямой поперечный изгиб, рассмотрены теории прочности и методы расчета при различных схемах нагружения. Эти разделы изложены в краткой конспективной форме и содержат необходимые примеры.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей высших учебных заведений.

УДК 539.3/.4 (075.8)
ББК 30.121 я73

ISBN 5-17-016164-6 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-271-05429-2 (ООО «Издательство Астрель»)

Оглавление

Введение

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей высших учебных заведений.

Несмотря на имеющиеся хорошие учебники по курсу сопротивления материалов таких авторов, как М.М. Филоненко - Бородич, Н.М. Беляев, В.И. Феодосьев, А.В. Дарков и Г.С. Шпиро, Б.В. Заславский и многих других студенты испытывают нехватку в данной учебной литературе.

Отражая стремительное развитие науки и практики в этой области, учебники от издания к изданию увеличивали свой объем, учебные планы насыщались специальными дисциплинами за счет уменьшения курса «Сопротивление материалов».

В настоящее время разрыв между объемом и содержанием учебной литературы и лекционных курсов достиг таких размеров, что использование студентами объемных учебников на базе сокращенных лекций весьма затруднительно.

Поэтому стало целесообразным издание учебной литературы, отражающей только программные вопросы. Содержание данного учебника, составленного в форме конспекта лекций, соответствует программе курса «Сопротивление материалов». По нему студенты могут проверить, исправить и дополнить свои лекционные записи, в результате чего может появиться необходимость в подробной проработке некоторых вопросов по более полным учебникам и научной литературе.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сопротивление материалов является частью механики твердого деформируемого тела, куда входят: теории упругости, пластичности, ползучести, сооружений, строительная механика, механика разрушения и др.

Задачей науки о сопротивлении материалов является изучение методов расчета элементов конструкций и деталей машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, не разрушаясь.

Жесткостью называется способность элемента конструкции сопротивляться воздействию приложенных к нему сил, испытывая при этом лишь малые упругие деформации.

Устойчивостью называется способность элемента конструкции сохранять первоначальную форму равновесия под действием приложенных сил.

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных к ним сил изменяют свою первоначальную форму и размеры, т.е. **деформируются**. Деформации тела, исчезающие после снятия внешних сил, называются **упругими**, а не исчезающие – **остаточными или пластическими** деформациями.

Целью расчета на прочность является определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается разрушение деталей.

Целью расчета на жесткость является определение размеров деталей или внешних нагрузок, при которых исключается появление недопустимых деформаций деталей с точки зрения нормальной работы конструкции.

1.2. РЕАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ И РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

Упрощенная схема реального объекта, освобожденного от факторов, не влияющих существенно на работу системы в целом, называется расчетной схемой. Переход к расчетной схеме осуществляется путем схематизации свойств материала, системы внешних сил, геометрии реального объекта, опорных устройств, и т.д.

1.2.1. Схематизация свойств материала

Материалы обладают различными физическими свойствами и структурой. Для упрощения расчетов используются следующие допущения.

1. Материал считается **однородным**, т.е. его свойства во всех точках одинаковы.

2. Материал считается **изотропным**, т.е. его свойства во всех направлениях одинаковы.

Изотропными являются такие аморфные материалы, как стекло и смолы. К анизотропным материалам относятся пластмассы, текстолит и т.п. Металлы — поликристаллические тела, состоящие из большого числа зерен, размеры которых очень малы (примерно 0,01 мм). Каждое зерно анизотропное, но вследствие малых размеров и их беспорядочного расположения металлы обладают свойством изотропии.

3. Материал имеет свойство **идеальной упругости**, вследствие которой деформируемое тело полностью восстанавливает свою форму и размеры после снятия нагрузки независимо от ее величины и температуры тела.

4. Форма и размеры упругого тела меняются прямо пропорционально изменению нагрузок, т.е. по закону Гука.

В случае чистого однородного растяжения или сжатия призматического стержня, по закону Гука его абсолютное удлинение Δl рассчитывается по формуле:

$$\Delta l = \frac{P l_0}{E F_0}, \qquad (1.1)$$

где P — растягивающая (сжимающая) осевая сила; l_0 — исходная длина стержня; F_0 — исходная площадь поперечного сечения стержня; E — модуль продольной упругости для данного материала. Формулу (1.1) можно представить в виде:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{P}{E F_0} \qquad (1.2)$$

или

$$\varepsilon = \sigma / E \qquad (1.3)$$

и

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \qquad (1.4)$$

где $\varepsilon = \Delta l / l_0$ — относительное удлинение расчетной части стержня; $\sigma = P/F_0$ — нормальное напряжение, т.е. усилие, приходящееся на единицу площади F_0 поперечного сечения стержня.

В данном случае границы применения закона Гука ничем не оговариваются, хотя в действительности при некоторых значениях нагрузок наблюдается существенное отклонение от закона пропорциональности.

В пределах упругости имеет место «эффект Пуассона» – отношение относительных поперечных удлинений ε' к относительным продольным удлинениям ε есть величина постоянная для данного материала:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \qquad (1.5)$$

или

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\sigma / E, \qquad (1.6)$$

где μ — коэффициент Пуассона – упругая константа материалов находится в пределах $0 < \mu < 0{,}5$. Уравнение (1.6) отражает закон Гука для поперечных деформаций.

5. Материал обладает свойством **сплошности**, т.е. способностью без пустот заполнять пространство, ограниченное поверхностью тела. Вследствие этого материал считается непрерывным, что позволяет использовать для определения напряжений и деформаций математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

6. Упругие тела относительно жесткие, поэтому перемещения точек тела весьма малы по сравнению с размерами самого тела. Эта гипотеза служит основанием для **принципа начальных размеров.**

1.2.2. Схематизация геометрии реального объекта

Схематизация геометрии реального объекта сводится к делению тел по геометрическим признакам на брус, оболочки и массивы.

Брусом называется тело, два измерения которого малы по сравнению с третьим (рис. 1.1).

Оболочкой называется тело, одно измерение которого мало по сравнению с двумя другими (рис. 1.2).

Массивом называется тело, все три измерения которого одинакового порядка.

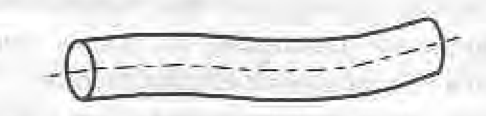


Рис. 1.1.

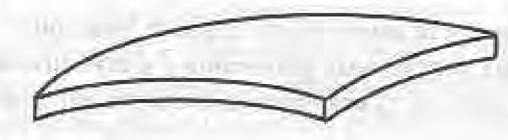


Рис. 1.2.

1.2.3. Схематизация опорных устройств

Пространственное твердое тело имеет шесть степеней свободы перемещений — три поступательных и три вращательных движения вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. Плоское тело имеет только три степени свободы — два поступательных движения в направлении двух осей и вращение вокруг третьей оси. Опорные устройства препятствуют указанным перемещениям тела и классифицируются по числу связей, накладываемых на перемещения опорных точек тела. Опорные связи и поверхности считаются абсолютно жесткими.

При нагружении тела на него со стороны опорных устройств действуют силы, называемые **реакциями опор**. Они находятся из уравнений равновесия тела, у которого опорные связи мысленно удалены и заменены силами, направленными в сторону снятых связей.

Для плоского тела основными видами опор являются шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная и защемляющая опора.

Шарнирно-подвижная или, иначе, **катковая** опора (рис. 1.3) исключает перемещение опорного узла А в направлении, перпендикулярном опорной поверхности, но не препятствует вращению тела вокруг опорной точки и его поступательному перемещению параллельно опорной поверхности. Такой опоре соответствует одна опорная реакция, направленная перпендикулярно опорной поверхности.

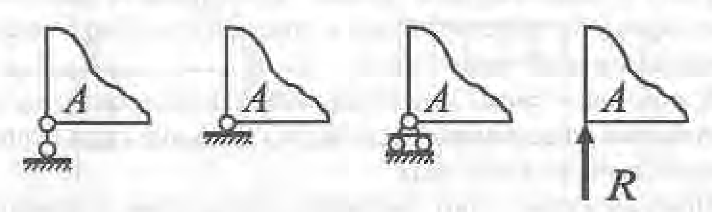


Рис. 1.3. *Шарнирно-подвижная опора*

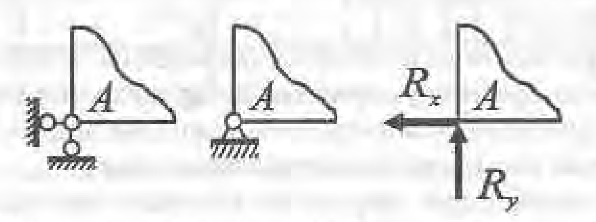


Рис. 1.4. *Шарнирно-неподвижная опора*

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.4) исключает всякое поступательное движение опорного узла А, но не препятствует вращению тела вокруг опорной точки. Реакцию такой опоры принято раскладывать на две составляющие силы R_x и R_y.

Защемляющая неподвижная опора или заделка (рис. 1.5) исключает поступательные и вращательные движения тела. Реакциями заделки являются силы R_x и R_y и опорный момент M.

1.2.4. Схематизация системы внешних сил

Внешние силы, воспринимаемые конструкциями называются нагрузками. К внешним силам относят также и реакции связей. Внешние силы могут быть сосредоточенными и распределенными, объемными и поверхностными, статическими и динамическими.

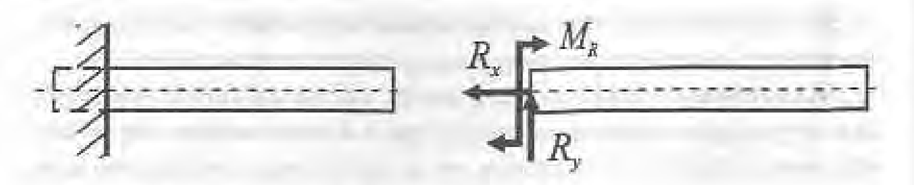


Рис.1.5. *Защемляющая неподвижная опора*

Под сосредоточенными силами подразумевают давления, распределенные по небольшой части поверхности тела, а не сосредоточенные в одной точке.

К объемным силам относятся силы тяжести, силы магнитного притяжения, инерционные силы и т.п. Объемные силы непрерывно распределены по всему телу.

Поверхностные силы являются результатом взаимодействия твердых тел или внешней среды, например, поток воздуха действует на крыло самолета. Поверхностные силы распределяются по поверхности тела.

Статические силы изменяются так медленно и плавно, что возникающими при этом ускорениями движущихся масс можно пренебречь. При статическом нагружении можно считать, что нагрузки во всех точках тела воспринимаются одновременно.

При динамическом нагружении возникают значительные инерционные силы, которые нужно учитывать наряду с другими нагрузками.

В сопротивлении материалов изучают действие только уравновешенных систем внешних и внутренних сил. Поэтому при рассмотрении вопросов равновесия деформируемого тела применимы все законы статики и динамики твердого тела. Можно перемещать силы вдоль линии их действия, заменять системы сил статически эквивалентными системами и т.д. При определении деформаций, энергий деформаций и других величин, связанных с перемещениями, указанные действия производить нельзя.

Рассмотрим метод схематизации системы внешних приложенных сил, действующих на тело на примере бруса с прямолинейной осью (рис. 1.6). Вместо бруса изображается его ось, т.е. геометрическое место центров тяжестей поперечных сечений. Все действующие на брус нагрузки сводятся к оси. При этом нагрузки, приложенные к участкам небольших размеров (P_1, P_2) по сравнению с размерами бруса, заменяются сосредоточенными силами. В противном случае нагрузка остается распределенной (q) по линии. При переносе сил в направлении перпендикулярном их линиям действия возникают сосредоточенные моменты.

Сосредоточенные силы измеряются в ньютонах (Н), моменты — (Н·м), распределенная нагрузка — (Н/м).

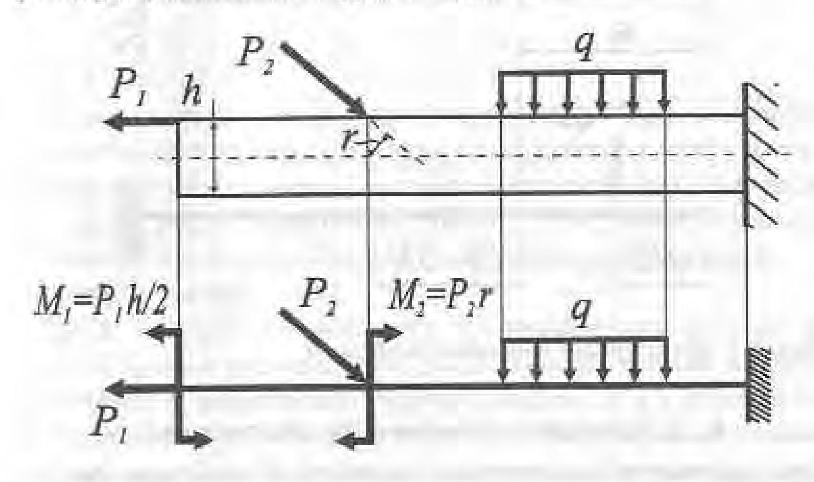


Рис. 1.6. *Схематизация системы приложенных сил*

1.3. ПРИНЦИПЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

1.3.1. Принцип Сен-Венана

При схематизации системы внешних сил имеет место принцип Сен-Венана: *если совокупность некоторых сил, приложенных к небольшой части поверхности тела, заменить статически эквивалентной системой других сил, то такая замена не вызовет существенных изменений при нагружении частей тела, достаточно удаленных от мест приложения исходной системы сил.*

Это значит, что следует рассматривать только те части тела, которые достаточно удалены от места приложения нагрузки.

На рис. 1.7 представлена иллюстрация принципа Сен-Венана. Замена распределенной нагрузки статически эквивалентной сосредоточенной силой не оказывает существенного влияния на условия

нагружения части бруса, удаленной на расстояние не менее (3—5)t от правой границы действия распределенной нагрузки, где t — наибольший размер поперечного сечения бруса.

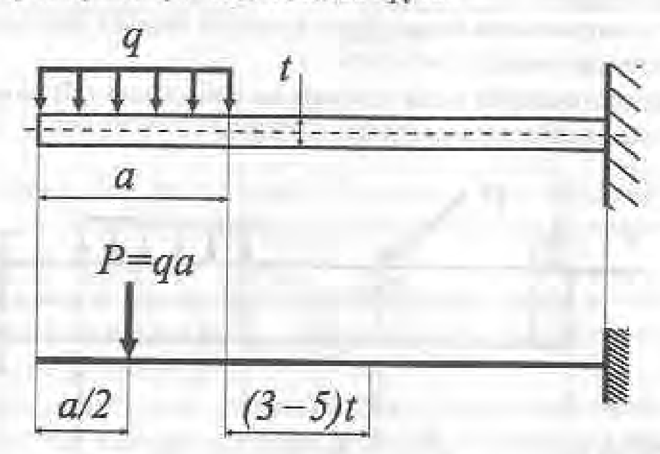


Рис. 1.7. *Иллюстрация принципа Сен-Венана*

1.3.2. Принцип независимости действия сил

При действии на относительно жесткое тело нескольких сил, результат действия одной части этих сил не зависит от результата действия остальных сил.

Следствие 1. Результат действия на тело нескольких сил равен сумме результатов действий каждой отдельной силы.

Следствие 2. Результат действия на тело нескольких сил не зависит от последовательности приложения этих сил.

1.3.3. Принцип начальных размеров

При составлении условий равновесия реального тела оно может считаться абсолютно твердым. В действительности же при нагружении форма и размеры тела меняются, следовательно, точки приложения сил и линии их действия тоже меняются. Учет этих изменений дает поправку в четвертом-пятом знаках результатов расчета, что несущественно.

Глава 2. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Нагрузки, приложенные к одной какой-нибудь части тела передаются остальным частям тела. Силы взаимодействия между частями тела, вызванные нагрузками, называются **внутренними силами**. Для упрощения, рассматриваются внутренние силы, распределенные по плоским сечениям тела. При этом используется метод сечений.

Метод сечений:

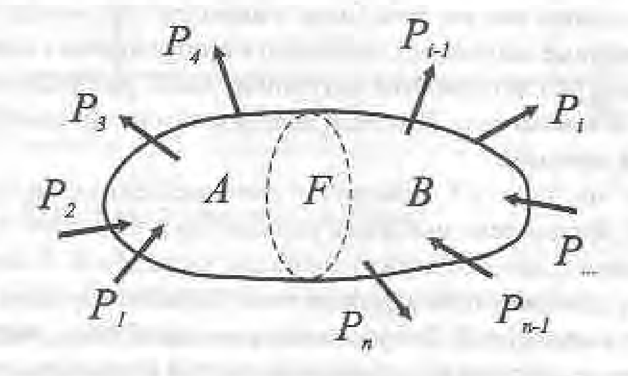
Пусть на тело *AB* действует уравновешенная система сил (рис.2.1). Данное тело мысленно рассекается плоскостью и получается сечение *F*, которое делит тело на две части: *A* и *B*. В каждой части будут действовать внутренние силы, характеризующие взаимодействие частей *A* и *B*. Отбросим одну из частей тела, например *B*, и заменим ее действие на оставшуюся часть *A* силами, распределенными по сечению *F*. Этим мы переводим внутренние силы в разряд внешних, благодаря чему появляется возможность использования положений статики твердого тела. Приведем внутренние силы, распределенные по сечению, к главному вектору и главному моменту в центре тяжести сечения и разложим их на компоненты по осям координат. Таким образом, внутренние силы будут иметь шесть компонентов — R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z. Значения компонентов внутренних сил могут быть найдены из шести условий равновесия отсеченной части тела:

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma m_x = 0,$$
$$\Sigma Y = 0,\ \Sigma m_y = 0,$$
$$\Sigma Z = 0,\ \Sigma m_z = 0.$$

Между компонентами внутренних сил и внешними силами существует функциональная зависимость, которая отражает форму и

размеры данного тела, расположение сечения F, направления и места приложения нагрузок, механические свойства материала.

Каждой компоненте внутренних сил соответствует определенный вид деформации: R_x — растяжение или сжатие, R_y и R_z — сдвиг в направлении осей y и z, M_x — кручение, M_y и M_z — изгиб относительно осей y и z. Каждая компонента характеризует сопротивление тела какому-нибудь одному виду деформации. При наличии только одной компоненты будет иметь место простое сопротивление тела. При наличии двух и более компонентов будет иметь место сложное сопротивление тела.



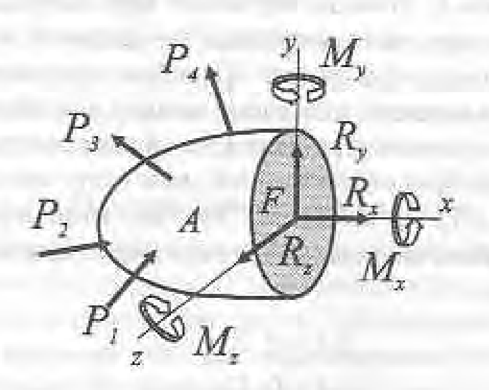


Рис. 2.1. *Иллюстрация метода сечений*

Глава 3. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

3.1. НАПРЯЖЕНИЯ

Мерой интенсивности внутренних сил, распределенных по сечениям, являются напряжения — усилия, приходящиеся на единицу площади сечения.

Выделим в окрестности точки B малую площадку ΔF (рис. 3.1). Пусть ΔR — равнодействующая внутренних сил, действующих на эту площадку. Тогда среднее значение внутренних сил, приходящихся на единицу площади ΔF равно:

$$p_m = \frac{\Delta R}{\Delta F}. \quad (3.1)$$

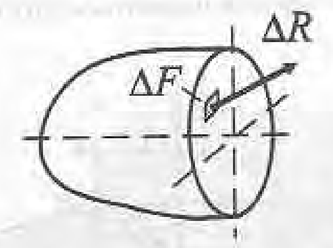


Рис. 3.1. *Среднее напряжение на площадке*

Величина p_m называется *средним напряжением* и определяет среднюю интенсивность внутренних сил. Уменьшая размеры площади, получим истинное напряжение в данной точке:

$$p = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} \quad (3.2)$$

Величина p и будет полным напряжением или просто **напряжением** в данной точке данного сечения.

Единица напряжения — Паскаль, 1 Па = 1 Н/м^2.

Напряжения, как и силы, являются векторными величинами. В каждой точке сечения тела **полное напряжение** p можно разложить на две составляющие (рис. 3.2). Составляющая, перпендикулярная к плоскости сечения называется **нормальным напряжением** и обозначается σ. Составляющая, лежащая в плоскости сечения, называется **касательным напряжением** и обозначается τ. Касательное напряжение в зависимости от действующих сил может иметь любое направление в плоскости сечения. Для удобства τ раскладывают на две составляющие, направление которых соответствует направлениям координатных осей.

Нормальному напряжению присваивается индекс, указывающий какой координатной оси параллельно его направление. **Растягивающее нормальное напряжение считается положительным, сжимающее – отрицательным**. В обозначении касательных напряжений первый индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке, второй – какой оси параллельно данное напряжение.

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет физический смысл. Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала в плоскости сечения.

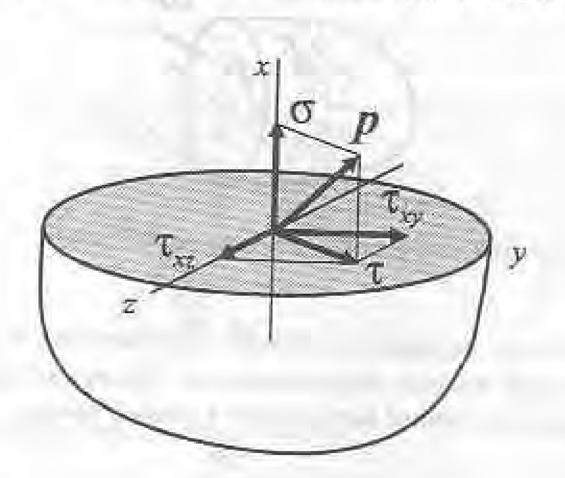


Рис. 3.2. *Разложение вектора полного напряжения*

Если мысленно вырезать около какой-нибудь точки тела бесконечно малый элемент в форме куба, то по его граням в общем случае будут действовать напряжения, представленные на рис. 3.3. Совокупность напряжений на всех элементарных площадках, которые можно провести через какую-либо точку тела, называется *напряженным состоянием в данной точке*.

Сумма моментов всех сил, действующих на элемент (рис.3.3), относительно оси x с учетом равновесия элемента равна

$$\sum M_x = 0,\ \tau_{zy}\,dxdydz - \tau_{yz}\,dxdzdy = 0. \qquad (3.3)$$

Записав то же для осей y и z, получим **закон парности касательных напряжений**:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},\ \tau_{xz} = \tau_{zx},\ \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad (3.4)$$

который формулируется следующим образом: *составляющие касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные общему ребру, равны по величине и противоположны по знаку*, т.е. либо обе направлены к ребру либо обе направлены от ребра.

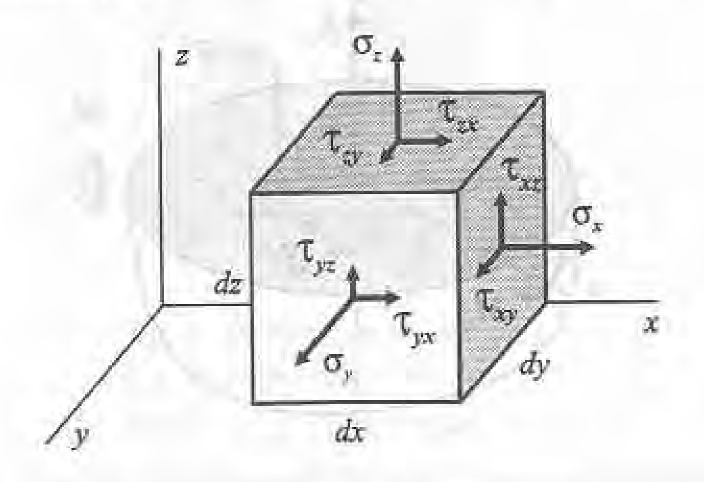


Рис. 3.3. *Система напряжений в точке*

3.2. СВЯЗЬ КОМПОНЕНТОВ ВНУТРЕННИХ СИЛ С НАПРЯЖЕНИЯМИ

В каждом сечении F главный вектор и главный момент внутренних сил имеют шесть компонентов и в каждой точке этого сечения действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 3.4). Суммируя элементарные силы, распределенные по сечению и их моменты относительно координатных осей, получим

$$\left.\begin{aligned} N_x &= R_x = \int_F \sigma dF, \; M_{кр} = M_x = \int_F (z\tau_{xy} - y\tau_{xz})dF, \\ Q_y &= R_y = \int_F \tau_{xy} dF, \; M_{изгy} = M_y = \int_F z\sigma dF, \\ Q_z &= R_z = \int_F \tau_{xz} dF, \; M_{изгz} = M_z = \int_F y\sigma dF \end{aligned}\right\}. \tag{3.5}$$

Таким образом, зная закон распределения по сечению напряжений, можно найти компоненты внутренних сил. В формуле (3.5) обозначения компонентов главного вектора и главного момента соответствуют деформациям, вызываемым ими.

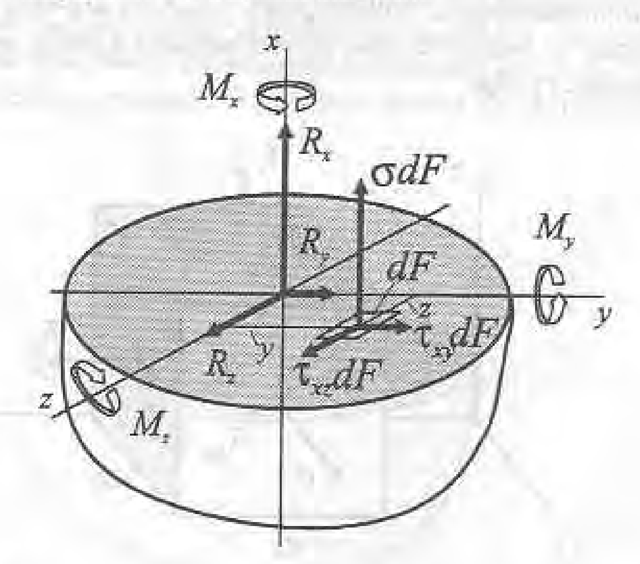


Рис. 3.4. *Связь компонентов внутренних сил с напряжениями*

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА НАКЛОННЫХ ПЛОЩАДКАХ

Для определения напряжений на произвольной наклонной площадке введем следующие индексы: для оси x — 1, для y — 2, для z — 3. Например, вектор направляющих косинусов внешней нормали n к наклонной площадке abc (рис. 3.5) будет иметь вид:

$$n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Тогда матрица компонент напряженного состояния будет

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Очевидно, что диагональные элементы указанной матрицы представляют собой нормальные напряжения, а не диагональные элементы – касательные напряжения и компоненты вектора полного напряжения p на наклонной площадке abc по координатным осям определяются уравнением:

$$p = \sigma n, \tag{3.8}$$

или

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Нормальное напряжение на наклонной площадке abc определяется проекцией вектора полного напряжения на нормаль:

$$\sigma_\alpha = p^T n,\tag{3.11}$$

где p^T — транспонированный вектор (3.9). Учитывая закон парности касательных напряжений, уравнение (3.4), получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + 2\sigma_{12}n_{12} + 2\sigma_{13}n_{13} + 2\sigma_{23}n_{23}.\tag{3.12}$$

Касательное напряжение на наклонной площадке abc равно

$$\tau_\alpha = \sqrt{p_\alpha^2 - \sigma_\alpha^2}\ ,\tag{3.13}$$

где модуль вектора полного напряжения равен:

$$|p_\alpha| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\ ,\tag{3.14}$$

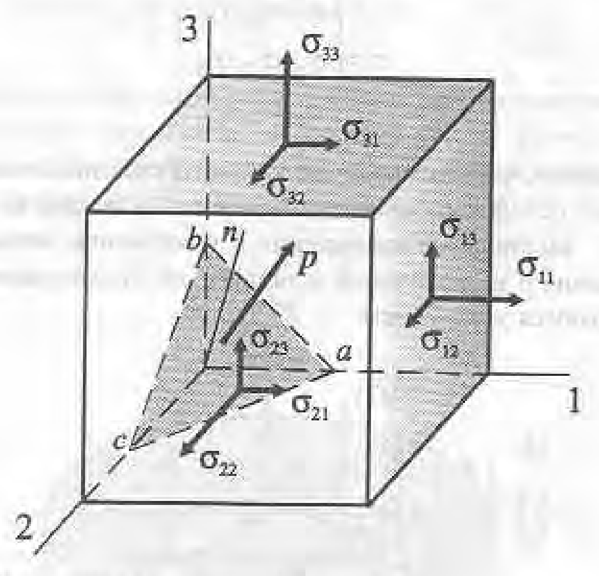


Рис. 3.5. *Напряжения на наклонной площадке*

3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ГЛАВНЫХ ПЛОЩАДОК

Если по граням выделенного элементарного куба действуют одни только нормальные напряжения, то они называются **главными напряжениями**, а площадки, на которых они действуют, называются **главными площадками**.

Можно доказать, что в каждой точке напряженного тела существуют три главные взаимно перпендикулярные площадки (рис. 3.6.). Обозначим главные напряжения s_1, s_2, s_3. При этом большее (с учетом знака) главное напряжение будет s_1, а меньшее (с учетом знака) — s_3.

Различные виды напряженного состояния классифицируют в зависимости от числа возникающих главных напряжений. Если все три главных напряжения отличны от нуля, то напряженное состояние называется **трехосным или объемным** (рис. 3.6). Если одно из главных напряжений равно нулю, то напряженное состояние называется **двухосным или плоским**. Если два главных напряжения равны нулю, то это **одноосное или линейное** напряженное состояние.

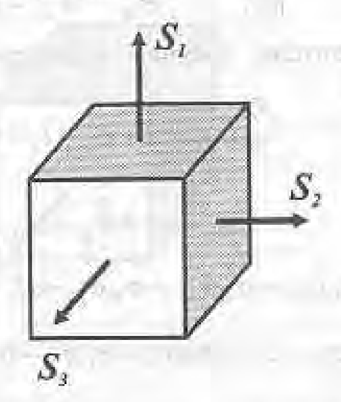


Рис. 3.6. *Главные напряжения*

Для определения главных напряжений предположим, что площадка abc (см. рис. 3.5) является главной площадкой. Тогда на ней будут действовать только нормальные напряжения, т.е. главные напряжения будут равны полным напряжениям p. В этом случае компоненты вектора полного напряжения p_1, p_2, p_3 можно рассматривать как проекции главных напряжений на оси координат:

$$p_1 = sn_1;\ p_2 = sn_2;\ p_3 = sn_3.\tag{3.15}$$

Подставив выражение (3.15) в уравнение (3.9), получим

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{11} - s)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0,\\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - s)n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0,\\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - s)n_3 = 0\end{aligned}\right\}.\tag{3.16}$$

Данная система уравнений представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно направляющих косинусов. В силу известного равенства

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \qquad (3.17)$$

направляющие косинусы не могут одновременно иметь нулевые значения. Поэтому определитель, составленный из коэффициентов системы уравнений (3.16), будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - s & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - s & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - s \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.18)$$

Раскрыв определитель, получим характеристическое уравнение третьего порядка

$$s^3 - s^2 I_1 + s I_2 - I_3 = 0, \qquad (3.19)$$

где

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \qquad (3.20)$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2, \qquad (3.21)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\,\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2, \qquad (3.22)$$

I_1, I_2, I_3 — называются инвариантами напряженного состояния в точке, так как не изменяют своей величины при изменении направления исходной системы прямоугольных координат. Можно доказать существование трех действительных корней уравнения (3.19).

Таким образом, в каждой точке тела, независимо от его формы и размеров, места приложения, вида и характера нагрузок, существует не более трех взаимно перпендикулярных главных напряжения.

Для определения положения главных площадок необходимо знать направляющие косинусы нормали к этой площадке. Для этого воспользуемся системой уравнений (3.16), равенство нулю определителя (3.18) которой указывает на то, что не все уравнения данной системы являются линейно независимыми: одно из них есть следствие двух других. Чтобы сделать систему уравнений определенной, добавим равенство (3.17), вследствие чего число независимых уравнений станет достаточным для однозначного определения направляющих косинусов.

3.5. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Плоское напряженное состояние имеет место в тех случаях, когда компоненты напряжений параллельны одной плоскости, например, при σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx} не равных нулю, и σ_z, τ_{zx}, τ_{xz} τ_{zy}, τ_{yz} — равных нулю (рис. 3.7).

Тогда выражение (3.18) примет вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - s & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.23)$$

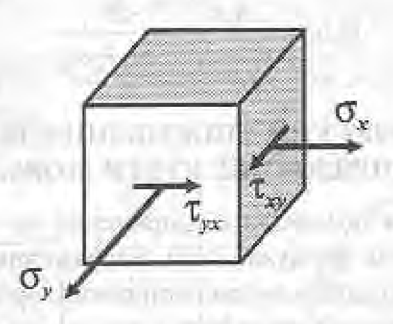


Рис. 3.7. *Плоское напряженное состояние*

Раскрыв определитель, получим

$$s \cdot \left[(\sigma_{11} - s)(\sigma_{22} - s) - \sigma_{12}^2\right] = 0. \qquad (3.24)$$

Решение $s = 0$ приводит к главной площадке, перпендикулярной оси z, где $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$. Приравнивая к нулю выражение в квадратных скобках, получим квадратное уравнение, решение которого имеет следующий вид:

$$s_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}. \qquad (3.25)$$

Эти два значения определяют напряжения на остальных двух главных площадках, параллельных оси z. Индексы трех главных напряжений устанавливаются после вычислений их значений по фор-

муле (3.25). Для определения положения главных площадок, параллельных оси z решим систему уравнений (3.16) относительно n_1:

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{11}-s)n_1+\sigma_{12}n_2=0\\ \sigma_{21}n_1+(\sigma_{22}-s)n_2=0\end{aligned}\right\}. \qquad (3.26)$$

Исключая s, получим

$$\sigma_{21}(n_1^2-n_2^2)+n_1n_2(\sigma_{22}-\sigma_{11})=0.$$

Отсюда находим тангенс двойного угла, на который следует повернуть ось x, чтобы она совпала с направлением нормали к первой главной площадке:

$$\text{tg}2\alpha=\frac{2n_1n_2}{n_1^2-n_2^2}=\frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11}-\sigma_{22}}. \qquad (3.27)$$

3.6. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. КРУГИ МОРА.

Для определения нормальных напряжений на наклонной площадке была выведена формула (3.12). Напряжения можно определять графическим способом путем построения круговой диаграммы напряженного состояния (круги Мора) для случая плоского напряженного состояния.

Пусть дан элемент (рис. 3.8, *а*), по боковым граням которого действуют известные главные напряжения, s_1 и s_2. Требуется графически определить напряжения σ_α (σ_{11}), σ_β (σ_{22}), τ_α (σ_{12}), τ_β (σ_{21}), действующие на наклонных площадках α и β, для чего выполним следующие действия:

1) выбираем прямоугольную систему координат (σ, τ) так, чтобы ось σ была параллельна большему из главных напряжений;
2) на оси σ от начала координат отложим отрезки, численно равные главным напряжениям s_1 и s_2, и на их разности, как на диаметре построим окружность;
3) из крайней левой точки A окружности проведем луч, параллельный нормали n_α к площадке α (рис. 3.8, б).

Покажем, что координаты точки M_α пересечения этого луча с окружностью численно равны σ_α и τ_α, а координаты диаметрально противоположной точки M_β численно равны σ_β и τ_β.

$$ON_\alpha=OC+CN_\alpha=\frac{s_1+s_2}{2}+CM_\alpha\cos2\alpha=\frac{s_1+s_2}{2}+\frac{s_1-s_2}{2}\cos2\alpha=$$
$$=s_1\cos^2\alpha+s_2\sin^2\alpha=\sigma_\alpha.$$

Аналогично находим ON_β:

$$ON_\beta=s_1\sin^2\alpha+s_2\cos^2\alpha=\sigma_\beta.$$

И, наконец

$$N_\alpha M_\alpha=CM_\alpha\sin2\alpha=\frac{s_1-s_2}{2}\sin2\alpha=\tau_\alpha.$$

$$N_\beta M_\beta=-CM_\alpha\sin2\alpha=-\frac{s_1-s_2}{2}\sin2\alpha=\tau_\beta.$$

Данный графический способ применим и для линейного напряженного состояния.

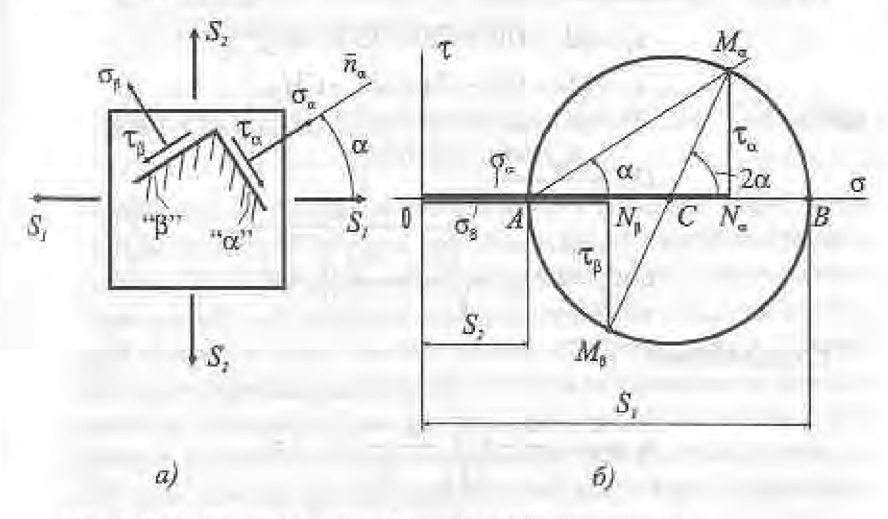


Рис. 3.8. *Графический способ определения напряжений на наклонных площадках*

3.7. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ПЛОЩАДОК

Формулы (3.25), (3.27), определяющие главные напряжения и положение главных площадок в случае плоского напряженного состояния имеют графическую интерпретацию. Для графического оп-

ределения главных напряжений в элементе (рис. 3.9, а) выполним следующие действия:

1) выбираем прямоугольную систему координат (σ, τ) так, чтобы ось σ была параллельна большему из напряжений, например σ_α;
2) на оси σ отложим отрезки, численно равные σ_α и σ_β.
3) в концах этих отрезков, учитывая знаки, восстановим перпендикуляры, соответственно равные τ_α и τ_β;
4) соединим концы данных перпендикуляров и на полученном отрезке, как на диаметре, построим окружность (рис. 3.9, б);
5) отрезки OA и OB, пересечения окружности с осью абсцисс будут численно равны искомым главным напряжениям;
6) s_1 будет направлено по линии AM'_α а s_2 - по линии AM'_β.

По найденным направлениям главных напряжений, строятся главные площадки и главные напряжения.

Из рис. 3.9 видно, что

$$s_1 = OB = OC + CB = OC + CM_\alpha,$$
$$s_2 = OA = OC - CA = OC - CM_\beta,$$

где

$$OC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2},$$

$$CM_\alpha = CM_\beta = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$s_1 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2},$$

$$s_2 = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2},$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0 = \frac{N_\alpha M'_\alpha}{CN_\alpha} = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}.$$

Если $\alpha_0 > 0$, то данный угол отсчитывается от оси абсцисс против хода часовой стрелки, а если $\alpha_0 < 0$ — по ходу часовой стрелки.

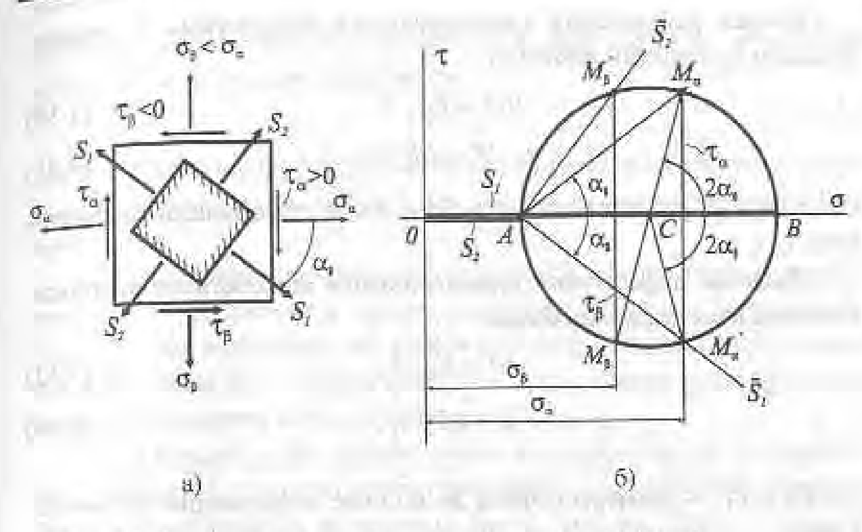


Рис. 3.9. *Графическое определение главных напряжений и положения главных площадок*

3.8. ДЕФОРМАЦИИ. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Деформация — это изменение формы или размеров тела. Любое тело можно мысленно разбить на элементарные параллелепипеды. Каков бы ни был вид деформации тела (растяжение, сжатие, сдвиг, кручение, изгиб), у параллелепипедов изменяются только линейные размеры (ребра) и углы наклона граней. Следовательно, в основе любых геометрических изменений тела лежат линейные и угловые деформации. Линейные размеры тела могут меняться в одном, одновременно в двух или трех взаимно перпендикулярных направлениях. В зависимости от этого деформации могут быть линейными, плоскими и объемными.

Линейная деформация характеризуется абсолютным удлинением

$$\Delta l = l_1 - l_0, \tag{3.28}$$

и относительным удлинением

$$\varepsilon = \Delta l / l_0, \tag{3.29}$$

где l_0 и l_1 — линейные размеры до и после деформации соответственно.

Плоская деформация характеризуется абсолютным и относительным сужениями площади:

$$\Delta F = F_0 - F_1 \tag{3.30}$$

$$\text{и} \quad \Psi = \Delta F / F_0, \tag{3.31}$$

где F_0 и F_1 - размеры площади до и после деформации соответственно.

Объемная деформация характеризуется абсолютным и относительным изменениями объема:

$$\Delta V = V_0 - V_1 \tag{3.32}$$

$$\text{и} \quad \vartheta = \Delta V / V_0, \tag{3.33}$$

где V_0 и V_1 — размеры объема до и после деформации соответственно.

Линейные деформации, как правило, сопровождаются изменением объема тела.

Угловая деформация характеризуется изменением углов наклона $\gamma = \alpha + \beta$ граней элементарного параллелепипеда (рис. 3.10). В результате угловой деформации происходит взаимное смещение параллельных граней, т.е. сдвиг. Относительный сдвиг γ является характеристикой угловой деформации. При угловых деформациях (сдвигах) меняется только форма тела, а объем остается неизменным.

Линейная деформация обычно связана с действием нормальных напряжений, а деформация сдвига является результатом действия касательных напряжений. Так, при одноосном растяжении бруса изменяется угол между площадками, где действуют касательные напряжения. Углы между поперечными и продольными площадками, где действуют только нормальные напряжения, остаются прямыми.

Если по граням элемента действуют только касательные напряжения, то такой элемент будет испытывать только деформацию сдвига. Такая деформация называется **чистым сдвигом** (рис. 3.11). Линейное смещение δ одной грани относительно противоположной называется *абсолютным сдвигом*, а отношение δ к расстоянию между этими гранями h — *относительным сдвигом* и $\delta/h = \mathrm{tg}\gamma$. Так как γ мало можно принять $\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma$. Подобно растяжению, где существу-

ет линейная зависимость между σ и ε формула (1.4), при сдвиге имеет место линейная зависимость

$$\tau = G\gamma \tag{3.34}$$

где G — модуль упругости при сдвиге или модуль упругости второго рода. Его размерность Н/м^2. Формула (3.34) выражает закон Гука при сдвиге.

Всякая деформация связана со смещением точек тела, но не всякое смещение точек тела является его деформацией. Смещение точек тела без изменения их взаимного расположения обусловлено перемещением тела. Смещение точек тела с изменением их взаимного расположения есть деформация.

Около каждой точки тела можно мысленно выделить бесчисленное множество различно ориентированных элементарных параллелепипедов, у каждого из которых будут свои линейные и угловые деформации. Совокупность всех линейных и угловых деформаций в данной точке есть деформированное состояние в этой точке тела.

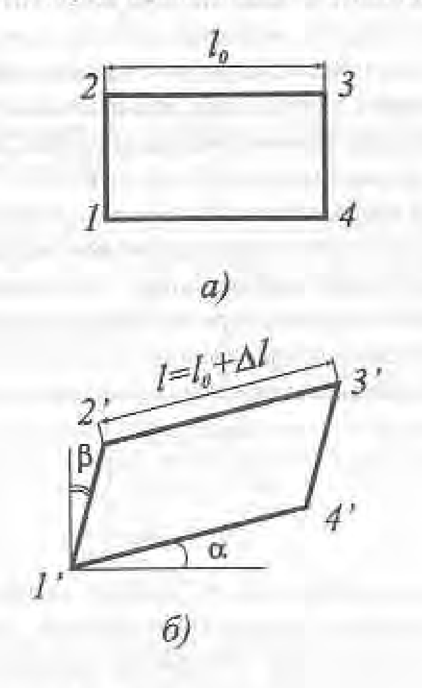


Рис. 3.10. *Угловые деформации*

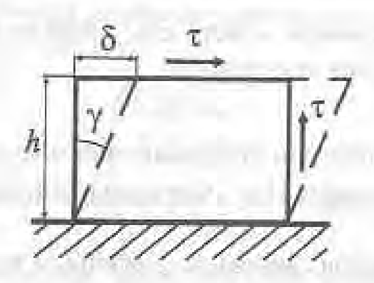


Рис.3.11. *Деформация чистого сдвига*

Относительные деформации в направлении координатных осей x, y, z (1, 2, 3) обозначаются ε_x, ε_y, ε_z (ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}). Угловые деформации характеризуются углами сдвига, представляющими собой изменение первоначально прямого угла между парой ортогональных отрезков. Углы сдвига в координатных плоскостях обозначаются γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} ($2\varepsilon_{12}$, $2\varepsilon_{23}$, $2\varepsilon_{13}$). Линейные деформации в направлении координатных осей прямоугольной системы координат и углы сдвига в координатных плоскостях называются *компонентами деформаций в данной точке тела*. Как компоненты напряжений определяют напряженное состояние в точке тела, так и компоненты деформаций определяют деформированное состояние в точке тела.

Имеет место полная аналогия в аналитических соотношениях и свойствах теории напряженного и теории деформированного состояний. Матрица компонент деформированного состояния соответствует матрице компонент напряженного состояния (3.7), где нормальные напряжения заменяются на относительные линейные деформации, а касательные напряжения – на сдвиги, с той лишь поправкой, что касательные напряжения заменяются не на γ, а на $\gamma/2$:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \qquad (3.35)$$

Относительная деформация по любому направлению, а также величины и направления главных деформаций, определяются аналогично соответствующим величинам для напряженного состояния. В изотропном теле направления главных осей напряженного и деформированного состояний совпадают.

3.9. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Согласно закону Гука в направлении каждого нормального напряжения (см. рис. 3.3) происходит продольная деформация формула (1.3). Одновременно, согласно эффекту Пуассона, в поперечных направлениях происходят противоположные по знаку деформации (1.6). Таким образом, в каждом из трех направлений происходит одна продольная и две поперечные деформации (табл. 3.1).

Складывая эти деформации, получим суммарные относительные удлинения в направлении напряжений σ_x, σ_y, σ_z:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.36)$$

Таблица 3.1.

Удлинения	**от σ_x**	**от σ_y**	**от σ_z**
Направление σ_x	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_z}{E}$
Направление σ_y	$-\mu\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_z}{E}$
Направление σ_z	$-\mu\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu\frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями устанавливает в пределах упругих деформаций закон Гука при сдвиге (3.34):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \qquad (3.37)$$

Уравнения (3.36), (3.37) выражают закон Гука в наиболее общем для изотропного тела случае – при объемном напряженном состоянии и объемной деформации. Закона Гука для плоского и

линейного напряженного или деформированного состояний тела можно получить, исключив из них напряжения или деформации равные нулю.

С помощью системы уравнений (3.36) можно вычислить объем элементарного параллелепипеда после деформации:

$$V_1 = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) \tag{3.38}$$

или

$$V_1 = dxdydz(1 + \frac{\Delta dx}{dx})(1 + \frac{\Delta dy}{dy})(1 + \frac{\Delta dz}{dz}) = V_0(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z), \tag{3.39}$$

где V_0 — объем до деформации.

Пренебрегая произведениями деформаций, получим относительное изменение объема:

$$\vartheta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{3.40}$$

Подставив в формулу (3.40) значения деформаций по формулам (3.36), получим выражение относительной объемной деформации:

$$\vartheta = \frac{1 - 2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \tag{3.41}$$

Из формулы (3.41) видно, что коэффициент Пуассона не может быть больше 0,5. При $\mu = 0{,}5$ объем не изменяется.

Пример 3.1. Резиновый кубик свободно, но без зазоров вложен в стальную форму, так, что две противоположные грани свободны (рис. 3.12). Сверху кубик подвергается давлению p. Определить напряжения, деформации и относительное изменение объема кубика. Трением между кубиком и стенками формы пренебречь. Стальную форму принять абсолютно жесткой (недеформируемой).

Решение. По условию задачи $\sigma_x = 0$, $\sigma_z = -p$, $\varepsilon_y = 0$. Тогда:

$$\sigma_y = -\mu p;\ \varepsilon_x = \mu(\mu + 1)p/E;\ \varepsilon_z = -(1 + \mu^2)p/E;\ \vartheta = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = -(1 - 2\mu)(1 + \mu)p/E.$$

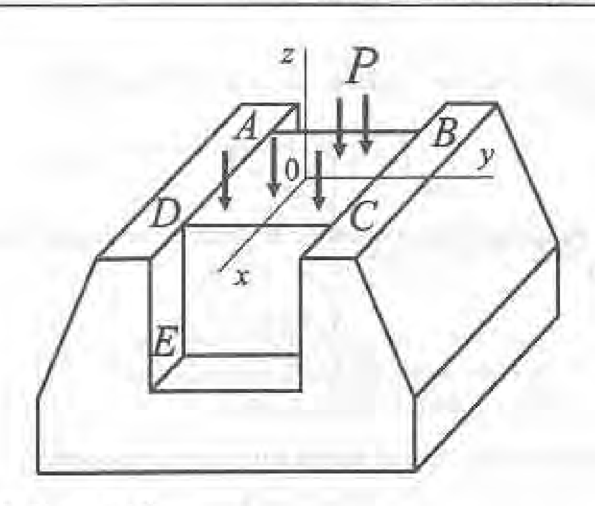


Рис. 3.12. *Пример 3.1*

3.10. УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

В общем случае при нагружении тела по граням элемента с размерами ребер dx, dy, dz будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения. Элементарная потенциальная энергия dU, накопленная в этом элементе при деформации тела, будет равна сумме работ внешних для выделенного элемента нормальных сил $dN_x = \sigma_x dydz$, $dN_y = \sigma_y dxdz$, $dN_z = \sigma_z dxdy$ на удлинения ребер параллелепипеда $\Delta dx = \varepsilon_x dx$, $\Delta dy = \varepsilon_y dy$, $\Delta dz = \varepsilon_z dz$ и касательных сил $dQ_{xy} = \tau_{xy} dydz$, $dQ_{xz} = \tau_{xz} dxdy$, $dQ_{yz} = \tau_{yz} dxdz$ на соответствующих им перемещениях $\gamma_{xy} dx$, $\gamma_{xz} dz$, $\gamma_{yz} dy$ граней элемента (рис. 3.13):

$$dU = \frac{dxdydz}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right). \tag{3.42}$$

Удельная потенциальная энергия, то есть энергия, накопленная в единице объема $dV = dxdydz$ элемента, будет равна:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right). \tag{3.43}$$

Если выразить компоненты деформаций через компоненты напряжений с помощью уравнений (3.36), (3.37) обобщенного закона Гука, то можно записать

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right). \tag{3.44}$$

Пусть напряженное состояние в точке тела задано тензором напряжений

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Представим этот тензор как сумму двух тензоров:

$$T = T_0 + D_0,$$

где

$$T_0 = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} \quad \text{— шаровой тензор;} \tag{3.46}$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} \quad \text{— девиатор напряжений,} \tag{3.47}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad \text{— среднее напряжение.}$$

Представление тензора напряжений как суммы двух тензоров равносильно представлению данного напряженного состояния (рис. 3.14) в виде суммы двух напряженных состояний.

Удельная потенциальная энергия деформации при всестороннем растяжении с напряжением σ_m определяется из уравнения (3.44) и равна

$$u_o = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_m^2 = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)^2 \tag{3.48}$$

и называется удельной потенциальной энергией изменения объема, так как изменение объема зависит только от суммы нормальных напряжений [см. уравнение (3.41)].

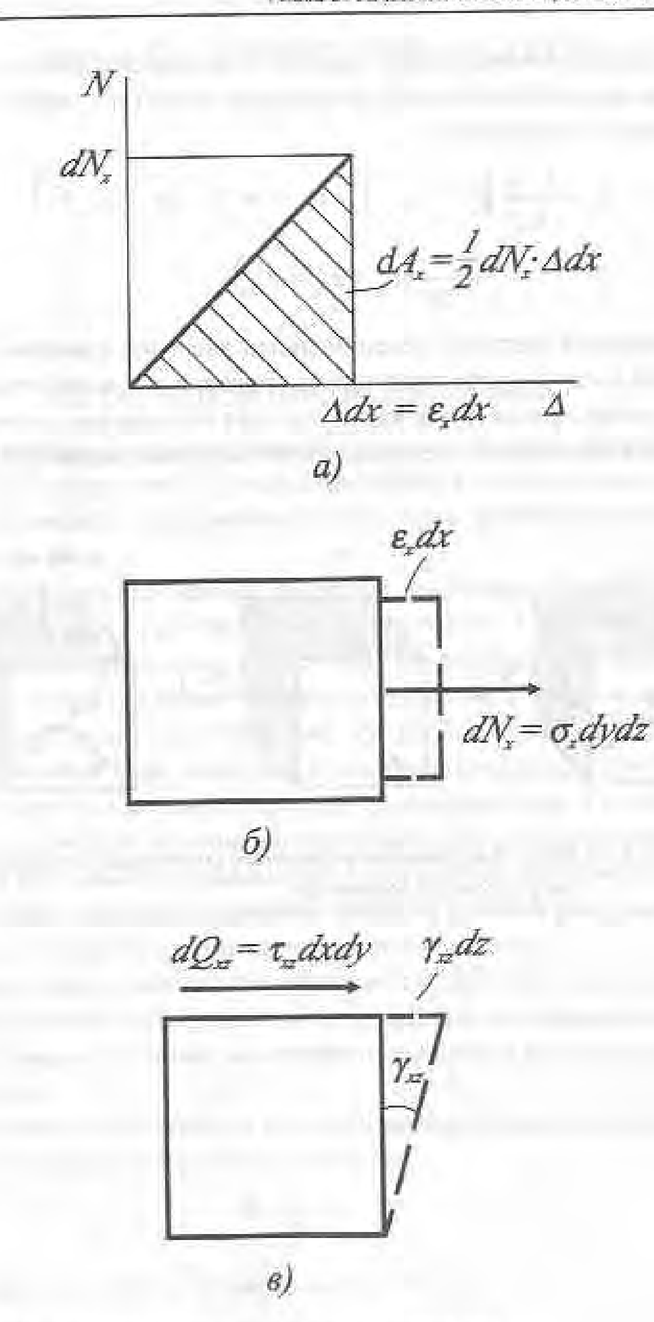


Рис. 3.13. *Работа нормальных и касательных сил*

Удельная потенциальная энергия деформации для элемента, по граням которого действуют компоненты девиатора напряжений, определяется уравнением:

$$u_ф = u - u_о = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right) \qquad (3.49)$$

и называется удельной потенциальной энергией изменения формы, которая в случае всестороннего растяжения с компонентами шарового тензора равна нулю, как и удельная потенциальная энергия изменения объема для элемента с компонентами девиатора напряжений:

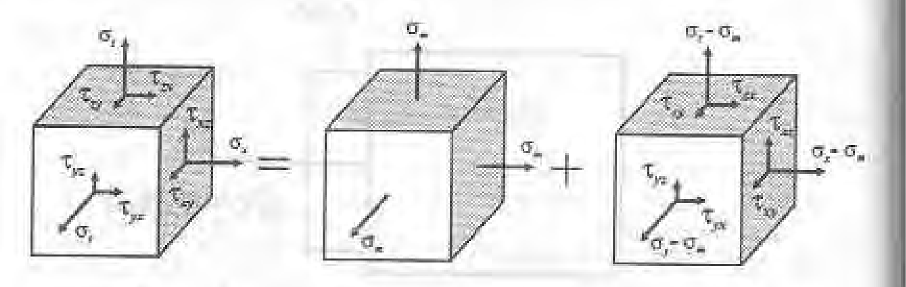


Рис. 3.14. *Представление напряженного состояния как суммы двух напряженных состояний*

Глава 4. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ



4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения бруса, при котором из шести составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил от нуля отличается только продольная сила.

На поверхность призматического стержня нанесем сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня (рис. 4.1, *а*). Приложим к нему растягивающую силу и убедимся, что линии сетки и после деформации останутся взаимно перпендикулярными, в то время как расстояния между ними изменятся (рис. 4.1, *б*). Все горизонтальные линии (*cd*) сместятся вниз, оставаясь горизонтальными и прямыми. Можно предположить, что и внутри стержня происходит то же, т.е. поперечные сечения стержня плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся плоскими и нормальными к оси и после деформации. Это предположение называют **гипотезой плоских сечений** или **гипотезой Бернулли**. Она подтверждается результатами опытов.

Картина деформаций дает основание считать, что в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению, а касательные напряжения равны нулю.

Продольная сила N (рис. 4.1, в) есть равнодействующая нормальных напряжений в поперечном сечении:

$$N = \int_F \sigma dF. \qquad (4.1)$$

Так как $\sigma = \text{const}$, из формулы (4.1) получим

$$N = \sigma F. \qquad (4.2)$$

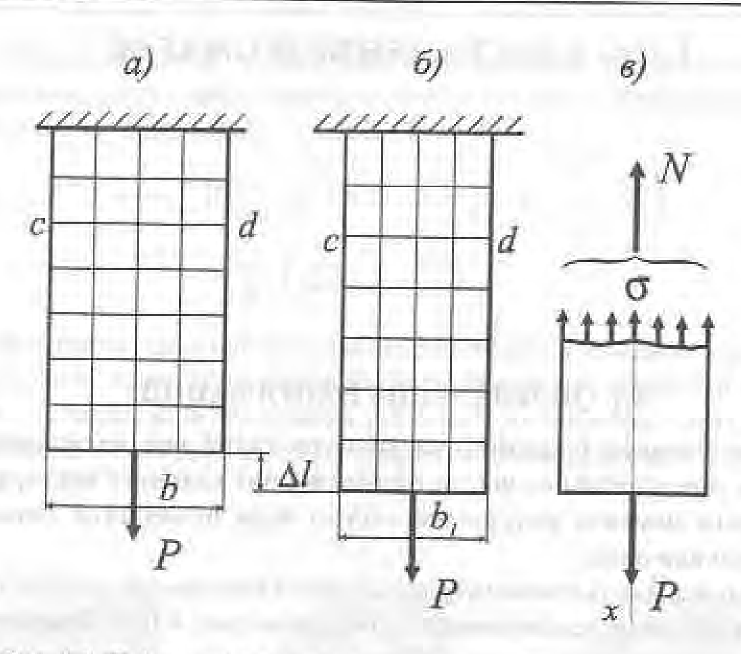


Рис. 4.1. *Деформация стержня*

откуда

$$\sigma = \frac{N}{F}. \qquad (4.3)$$

Полученные формулы справедливы и для сжатия, но сжимающие напряжения будут иметь знак минус.

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Опыты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается, поперечные размеры уменьшаются, а при сжатии наоборот.

Для многих материалов при нагружении до определенных пределов справедлив закон Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \qquad (4.4)$$

где $\varepsilon = \Delta l/l$ — относительное удлинение стержня; Δl — абсолютное удлинение стержня; l, l_1 — длина образца до и после деформации соответственно.

Модуль продольной упругости или модуль упругости первого рода E зависит от материала и характеризует жесткость материала, т. е. его способность сопротивляться деформированию. В табл. 4.1 даны значения E для некоторых материалов.

Таблица 4.1.

Материал	E, МПа
Сталь	$2\cdot10^5 - 2{,}2\cdot10^5$
Медь	$1\cdot10^5$
Дерево	$1\cdot10^4$
Алюминий	$0{,}675\cdot10^5$
Чугун	$0{,}75\cdot10^5 - 1{,}6\cdot10^5$
Стеклопластики	$0{,}18\cdot10^5 - 0{,}40\cdot10^5$

Так как для стержня постоянного сечения $\varepsilon = \Delta l / l$, а $\sigma = N/F$ из формулы (4.4) получим формулу для полного (абсолютного) удлинения (укорочения) стержня

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \qquad (4.5)$$

Между продольной ε поперечной ε' деформациями существует экспериментальная зависимость

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon. \qquad (4.6)$$

В таблице 4.2 приведены значения μ для некоторых материалов.

Таблица 4.2

Материал	μ	Материал	μ
Сталь	0,25—0,33	Свинец	0,45
Медь	0,31—0,34	Латунь	0,32—0,42
Бронза	0,32—0,35	Алюминий	0,32—0,36
Чугун	0,23—0,27	Цинк	0,21
Стекло	0,25	Камень	0,16—0,34
Бетон	0,08—0,18	Каучук	0,47
Пробка	0	Фанера	0,07
Целлулоид	0,39		

Для стали при упругих деформациях можно принимать $\mu \approx 0,3$. Зная ε', можно определить полное поперечное сужение или расширение стержня Δb:

$$\varepsilon' = \Delta b/b,\ \Delta b = b - b_1, \quad (4.7)$$

где b, b_1 поперечный размер стержня до и после деформации соответственно.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Для расчета на прочность и жесткость элементов конструкций необходимо располагать характеристиками механических свойств материалов, которые определяются экспериментальным путем.

Механические свойства материалов при различных видах деформаций (растяжении, сжатии, кручении и т. п.) изучаются путем испытания образцов на специальных машинах, которые снабжены устройствами для замеров нагрузки на образец. Деформации измеряются тензометрами, устанавливаемыми на образцах.

Используются круглые и плоские образцы, размеры и конфигурация которых стандартизованы. Образцы имеют на концах головки под захват машины и плавный переход к более тонкой рабочей части постоянного сечения (рис. 4.2). Данная форма образца обеспечивает однородное напряженное состояние в рабочей части.

В процессе испытания автоматически строится диаграмма растяжения, представляющая собой зависимость между нагрузками и вызванными ими удлинениями.

При построении диаграмм растяжения по оси абсцисс откладываются удлинения Δl рабочей части образца, а по оси ординат — соответствующие им значения растягивающей силы P.

На рис. 4.3 представлена диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали, которая имеет три характерных участка.

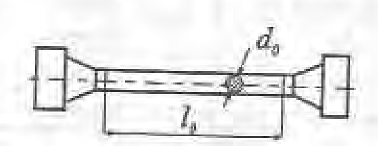


Рис. 4.2. *Образец для испытаний на растяжение*

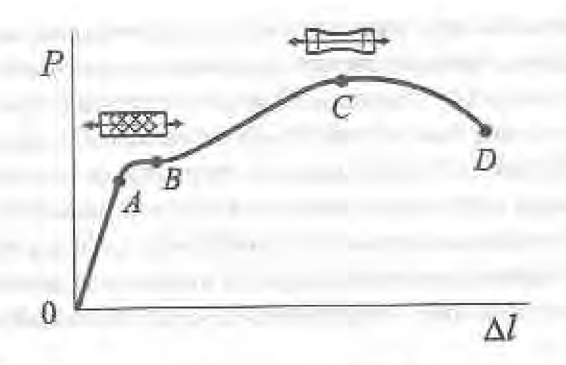


Рис. 4.3. *Первичная диаграмма растяжения образца из пластичного материала с площадкой текучести*

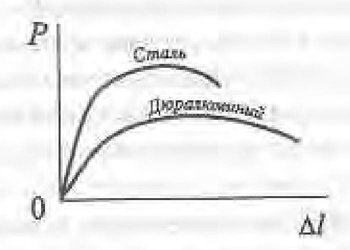


Рис. 4.4. *Первичные диаграммы растяжения образцов из пластичного материала без площадки текучести*

На участке *OA*, соответствующем **стадии упругости** образца, деформации материала подчиняются закону Гука.

На участке *AB* при постоянной нагрузке наблюдается удлинение образца. Это явление называется **текучестью,** а горизонтальный (или почти горизонтальный) участок диаграммы растяжения называется **площадкой текучести.**

На стадии текучести поверхность образца покрывается сеткой линий, называемых **линиями сдвига,** которые являются следами плоскостей скольжения (сдвига) частиц материала друг относительно друга. Они наклонены к оси бруса под углом $\approx 45°$, и практически совпадают с плоскостями действия максимальных касательных напряжений.

Такие пластичные материалы, как легированные стали, дюралюминий и др. площадки текучести не имеют. *Первичные диаграммы растяжения* образцов таких материалов представлены на рис. 4.4.

На участке *BC* (см. рис. 4.3), который называется **зоной упрочнения**, материал вновь приобретает свойство оказывать сопротивление нагрузке, но с удлинением образца нагрузка возрастает значительно медленнее, чем на упругом участке *OA*. В зоне упрочнения равномерное до этого уменьшение поперечных размеров рабочей части образца нарушается из-за местного утоньшения — шейки. Деформация образца локализуется в области шейки, и в связи с быстрым уменьшением сечения образца нагрузка за точкой *C* быстро падает. Точка *D* соответствует моменту разрушения образца.

4.4. ДИАГРАММЫ УСЛОВНЫХ И ИСТИННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Диаграмма растяжения в координатах $P - \Delta l$ является характеристикой образца из данного материала, так как при одном и том же значении силы *P* величина удлинения зависит от поперечных и продольных размеров образца. Чтобы исключить влияние размеров образца и получить характеристику материала, строят *диаграмму условных напряжений* (рис. 4.5.), где $\sigma = P/F_0$; $\varepsilon = \Delta l/l_0$.

При этом пренебрегают изменением площади сечения образца в процессе растяжения и неравномерностью распределения деформаций по длине его рабочей части после образования шейки. Уравнение линейного участка диаграммы условных напряжений $\sigma = E\varepsilon$ представляет собой математическую запись закона Гука при одноосном растяжении. Численно модуль упругости равен тангенсу угла наклона прямолинейного участка диаграммы растяжения к оси абсцисс.

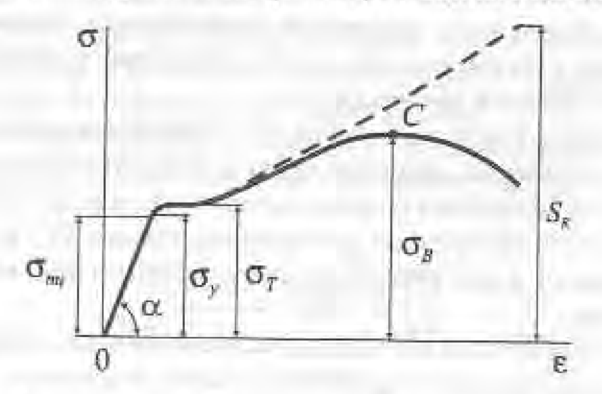


Рис. 4.5. *Диаграмма условных напряжений*

Диаграмма растяжения, где по оси ординат откладывается напряжение, полученное делением силы на наименьшую площадь сечения образца, а по оси абсцисс — наибольшее удлинение в данный момент нагружения, называется *диаграммой истинных напряжений*. Эта диаграмма показана на рис. 4.5 пунктиром. Падения напряжений за точкой *C* не наблюдается, так как площадь сечения в шейке уменьшается быстрее, чем падает нагрузка, поэтому истинные напряжения в этом месте возрастают. Различие диаграмм условных и истинных напряжений становится заметным после образования шейки.

4.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Характеристиками механических свойств материалов являются значения напряжений и деформаций, соответствующие определенным точкам диаграммы условных напряжений.

Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется наибольшее напряжение, до которого значения деформации прямо пропорциональны напряжениям.

Пределом упругости $\sigma_у$ называется напряжение, до значения которого материал не получает остаточных деформаций.

Пределом текучести $\sigma_Т$ называется напряжение, при котором значения деформации растут без увеличения нагрузки.

Пределом прочности, или **временным сопротивлением** $\sigma_В$ называется максимальное напряжение (подсчитанное по первоначальной площади сечения образца), выдерживаемое материалом при растяжении. Его величина соответствует ординате точки *C* условной диаграммы.

Опытное определение величин пределов пропорциональности и упругости зависит от точности измерения деформаций.

Под пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ понимается напряжение, при котором отклонение от линейной зависимости между напряжениями и деформациями достигает определенной величины, устанавливаемой стандартом.

Пределом упругости называется напряжение, при котором остаточные деформации достигают установленной величины, например 0,001 или 0,005 %. Условный предел упругости при остаточной деформации 0,005 % обозначается $\sigma_{0,005}$.

Для материалов, не имеющих площадки текучести, в качестве предела текучести принимается напряжение, при котором остаточные деформации составляют 0,2 или 0,3 % первоначальной длины образца. Условный (технический) предел текучести в соответствии с этим обозначается $\sigma_{0,2}$ или $\sigma_{0,3}$.

Пластические свойства материала, т.е. способность к образованию остаточных деформаций, характеризуются величиной остаточного удлинения образца при разрыве:

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%, \tag{4.8}$$

а также относительным уменьшением площади сечения образца в шейке

$$\Psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} 100\%, \tag{4.9}$$

где l_1, F_1 — длина рабочей части образца и площадь наименьшего сечения шейки разорванного образца, соответственно; l_0, F_0 — их величины до нагружения.

4.6. ЗАКОН УПРУГОЙ РАЗГРУЗКИ

Если образец нагрузить до напряжений, значения которых будут больше σ_y, но меньше σ_B (рис. 4.6, участок *OK*), а затем разгрузить, то разгрузка будет происходить по прямой *KL* — параллельно начальному линейному участку диаграммы. После разгрузки деформация образца уменьшится, но полностью не исчезнет. Отрезок *LM* определяет величину *исчезающей*, т. е. *упругой деформации* ε_y, а отрезок *OL* — величину *остаточной (пластической) деформации* $\varepsilon_{пл}$. Прямая линия разгрузки показывает, что упругая деформация подчиняется закону Гука и за пределами пропорциональности.

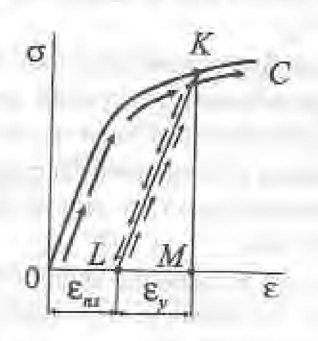


Рис. 4.6. *Закон упругой разгрузки*

Повторное нагружение образца пойдет по прямой разгрузки *LK*, и затем по кривой *KC*, т.е. по кривой зависимости, как если бы образец продолжал нагружаться после точки *K* без промежуточной разгрузки. Таким образом, после разгрузки появился как бы новый материал с более высоким пределом пропорциональности, но меньшей пластичностью.

Повышение упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется **наклепом** или **нагартовкой.** Наклеп возникает при вытяжке и холодной прокатке металла, в процессе штамповки. Часто наклеп играет положительную роль и применяется для упрочнения поверхностного слоя детали, повышения упругости проволоки, канатов и т. п. В тех случаях, когда наклеп вреден, его устраняют отжигом.

4.7. ПЛАСТИЧНЫЕ И ХРУПКИЕ МАТЕРИАЛЫ

По результатам испытаний на одноосное растяжение материалы делят на пластичные и хрупкие. К пластичным относятся материалы, разрушению которых предшествуют большие остаточные деформации, достигающие 20—25 %. Хрупкими считаются материалы, разрушающиеся при малых остаточных деформациях, не превышающих 2—5 %. К пластичным материалам относятся малоуглеродистая сталь, алюминий; к хрупким — чугун, инструментальная сталь, стекло. Пластичные и хрупкие материалы отличаются характером разрушения при растяжении. Пластичные материалы проявляют большее сопротивление отрыву частиц, чем сдвигу, и разрушаются главным образом, от сдвига частиц в плоскостях действия наибольших касательных напряжений. Именно из-за сдвига частиц увеличивается длина образца из пластичного материала при растяжении, а место разрушения в шейке имеет вид кратера, стенки которого наклонены к оси образца под углом 45° (рис. 4.7). Дном кратера является поверхность первоначальной внутренней трещины, возникающей после образования шейки.

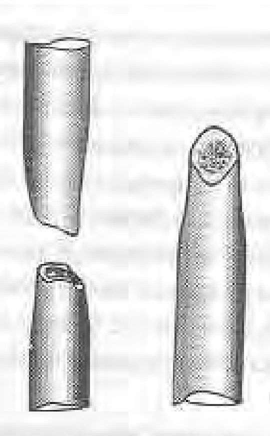


Рис. 4.7. *Разрушение пластичного материала*

Хрупкие материалы, наоборот, обладают большим сопротивлением сдвигу, чем отрыву, и разрушаются при растяжении внезапно из-за отрыва частиц материала по плоскости поперечного сечения (рис. 4.8). Явления текучести, упрочнения и образования шейки на образцах из хрупких материалов перед разрывом не наблюдаются. Единственной прочностной характеристикой хрупких материалов



Рис. 4.8. *Разрушение хрупкого материала*

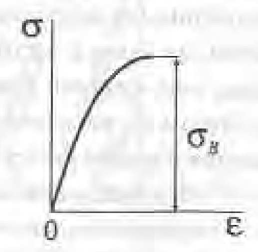


Рис. 4.9. *Диаграмма растяжения для хрупких материалов*

является предел прочности σ_B. Диаграмма растяжения хрупких материалов представлена на рис. 4.9.

Деление материалов на хрупкие и пластичные условно, так как свойства материалов зависят от температуры, скорости и вида нагружения. Один и тот же материал в одних условиях ведет себя как хрупкий, в других — как пластичный. Поэтому правильнее говорить о пластичном и хрупком характере разрушения материала.

4.8. ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЖАТИИ

При сжатии образца из пластичного материала, как и при растяжении, сначала имеет место линейная зависимость ε от σ, затем следуют площадка текучести и зона упрочнения. В отличие от растяжения площадка текучести едва намечается, и дальше нагрузка продолжает возрастать. Это происходит потому, что при сжатии образец из пластичного материала не разрушается, а постепенно сплющивается в тонкий диск при одновременном увеличении площади сечения (рис. 4.10). Поэтому определить предел прочности пластичного материала при сжатии невозможно.

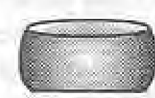


Рис. 4.10. *Образец из пластичного материала после сжатия*

Для испытаний на сжатие используют короткие цилиндрические образцы. Бочкообразная форма, которую они принимают в процессе испытания, обусловлена силами трения между плитами пресса и торцами образца. Диаграммы растяжения и сжатия для пластичного материала приведены на рис. 4.11.

Для пластичных материалов разница между пределами текучести при растяжении σ_{Tp} и сжатии $\sigma_{Tсж}$ незначительна. Образцы из хрупких материалов при сжатии разрушаются по наклонным (под углом 45°) плоскостям (рис. 4.12). Диаграммы растяжения и сжатия для хрупкого материала приведены на рис. 4.13. Хрупкие материалы значительно лучше работают на сжатие, чем на растяжение. Например, у чугуна предел прочности при сжатии в среднем в три раза больше, чем при растяжении.

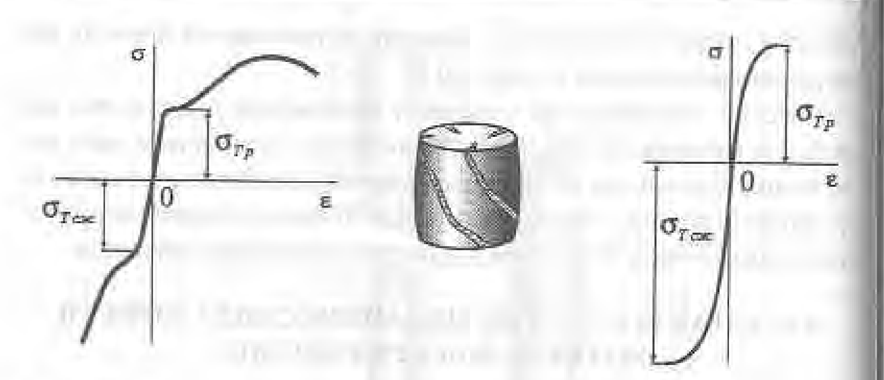


Рис. 4.11. *Диаграммы растяжения и сжатия для пластичного материала*

Рис. 4.12. *Образец из хрупкого материала при сжатии*

Рис. 4.13. *Диаграммы растяжения и сжатия для хрупкого материала*

4.9. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА ПРОЧНОСТИ. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Фактические нагрузки, действующие на деталь, и свойства материалов, из которых она изготовлена, могут значительно отличаться от тех, которые принимаются для расчета.

Факторы, снижающие прочность детали (перегрузки, неоднородность материалов и т. д.), носят чаще всего случайный характер и предварительно не могут быть учтены.

Поэтому напряжения, обеспечивающие безотказную работу при эксплуатации машин и элементов конструкций, должны быть ниже тех предельных напряжений, при которых может произойти разрушение или возникнуть пластические деформации.

Поэтому допускаемое напряжение будет равно

$$[\sigma]=\frac{\sigma_u}{[n]}, \tag{4.10}$$

где σ_u — предельное напряжение материала; $[n]$ — нормативный (т. е. предписываемый нормами проектирования конструкций) **коэффициент запаса прочности**, называемый также **коэффициентом безопасности**.

Коэффициент запаса прочности вводится для того, чтобы обеспечить безопасную, надежную работу конструкции и отдельных ее частей, несмотря на возможные неблагоприятные отклонения действительных условий их работы от расчетных. Нормативный коэффициент запаса прочности $[n]$ определяется с учетом имеющегося опыта эксплуатации подобных конструкций.

При статических нагрузках за предельное напряжение для хрупких материалов принимают предел прочности, для пластичных - предел текучести, так как при напряжениях, равных пределу текучести, возникают значительные пластические деформации, которые недопустимы.

В табл. 4.4 приведены ориентировочные значения допускаемых напряжений при статическом нагружении для некоторых материалов.

Таблица 4.4.

Материал	Допускаемые напряжения, МПа	
	На растяжение	На сжатие
Чугун серый в отливках:		
СЧ 12...СЧ28	20—30	70—110
СЧ 15...СЧ32	25—40	90—150
СЧ 21...СЧ40	35—55	160—200
Сталь:		
Ст0 и Ст2	140	140
Ст3	160	160
Ст3 в мостах	140	140
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	60—250	60—250
Сталь легированная конструкционная в машиностроении	100—400 и выше	100—400 и выше
Дюралюминий	80—150	80—150
Латунь	70—140	70—140
Сосна вдоль волокон	7—10	10—12
Дуб вдоль волокон	9—13	13—15
Кирпичная кладка	До 0,2	0,6—2,5
Бетон	0,1—0,7	1—9
Текстолит	15—30	30—40

4.10. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ РАСТЯНУТЫХ (СЖАТЫХ) СТЕРЖНЕЙ

Для оценки прочности стержня, действующие в опасном сечении стержня напряжения, сопоставляются с допускаемыми напряжениями на растяжение или сжатие:

$$\sigma = \frac{N}{F} \le [\sigma]. \tag{4.11}$$

Выражение (4.11) называется условием прочности при растяжении (сжатии), на основании которого решаются следующие задачи:

1. Проверка прочности стержня, т. е. определение по заданным нагрузкам и размерам поперечного сечения напряжений и сравнение их с допускаемыми. Фактические напряжения не должны отличаться от допускаемых напряжений больше чем на 5 %. Превышение этой величины недопустимо с точки зрения прочности, а заниженное значение свидетельствует о перерасходе материала.

2. Определение размеров поперечного сечения стержня, обеспечивающих условия прочности:

$$F \ge \frac{N}{[\sigma]}. \tag{4.12}$$

3. Определение значения допускаемой нагрузки:

$$[N] \le F \cdot [\sigma]. \tag{4.13}$$

Определив допускаемую продольную силу и установив связь между продольной силой и нагрузкой (методом сечений), можно найти значение допускаемой нагрузки.

Пример 4.1. Определить допускаемую нагрузку растягиваемого стального листа, ослабленного отверстиями d = 20 мм (рис. 4.14). Допускаемое напряжение $[\sigma]$=160 МПа, толщина листа t = 10 мм, ширина b = 200 мм.

Решение. Допускаемую нагрузку определяют расчетом на прочность по сечению, ослабленному отверстиями, так как здесь, прежде всего, может произойти разрушение. Полная площадь сечения листа F = 20 см^2.

Площадь ослабления двумя отверстиями ΔF=4 см^2. Рабочая площадь сечения $F_{раб} = F - \Delta F$ = 16 см^2 = $16 \cdot 10^{-4}$ м^2.

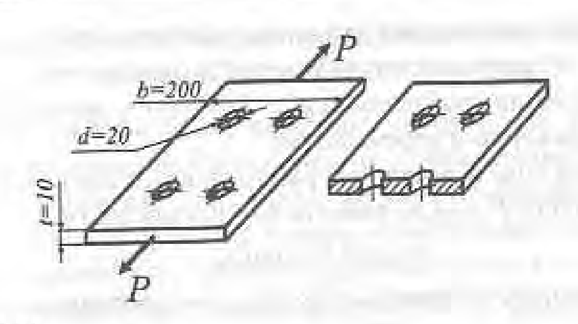


Рис. 4.14.

Допускаемая нагрузка $[P] = F_{раб}[\sigma] = 16 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 256 \cdot 10^3$ = = 256 кН.

Пример 4.2. Определить диаметры круглых поперечных сечений стержней кронштейна (рис. 4.15), если $[\sigma]$ = 160 МПа.

Усилия в стержнях определяются методом сечений путем «вырезания» узла A. Из уравнений проекций всех сил на оси y, x, получим:

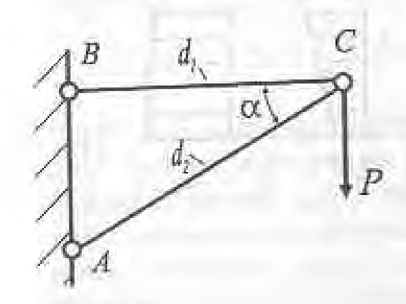
$$\sum y = 0;\ -P - N_2 \sin\alpha = 0;\ N_2 = -P/\sin\alpha = -3 \cdot 10^4 / 0{,}5 = -6 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$\sum x = 0;\ -N_1 - N_2 \cos\alpha = 0;\ N_1 = -N_2 \cos\alpha = 6 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{3}/2 = 5{,}23 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Диаметры стержней определяются из условий прочности:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{F_1} \le [\sigma];\ F_1 = \pi d_1^2/4;\ d_1 \ge \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5{,}23 \cdot 10^4}{3{,}14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0{,}0204 \text{ м};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{F} \le [\sigma];\ d_2 \ge \sqrt{\frac{4|N_2|}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6 \cdot 10^4}{3{,}14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0{,}0218 \text{ м}.$$



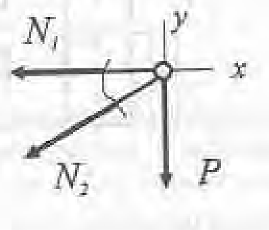


Рис. 4.15.

Пример 4.3. Вертикально расположенный призматический стержень (рис. 4.16) нагружен силой тяжести и сосредоточенной силой P, приложенной на свободном конце. Построить эпюры нормальных сил, напряжений и перемещений.

Нормальная сила в сечении на расстоянии x от свободного конца равна сумме силы P и силы тяжести его нижней части:

$$N(x) = P + \rho gFx,$$

где ρ — плотность материала стержня, g — ускорение свободного падения.

Нормальная сила и нормальное напряжение $\sigma(x) = N(x)/F = P/F + \rho gx$ изменяются по линейному закону (рис. 4.16). Перемещение текущего сечения равно удлинению верхней части бруса и может быть определено по закону Гука:

$$\delta(x) = \int_x^l \frac{N(x)dx}{EF} = \int_x^l \frac{(P + \rho gFx)dx}{EF} = \frac{P(l-x)}{EF} + \frac{\rho g}{2E}\left(l^2 - x^2\right)$$

$$\delta_{max} = \frac{Pl}{EF} + \frac{\rho gl^2}{2E}.$$

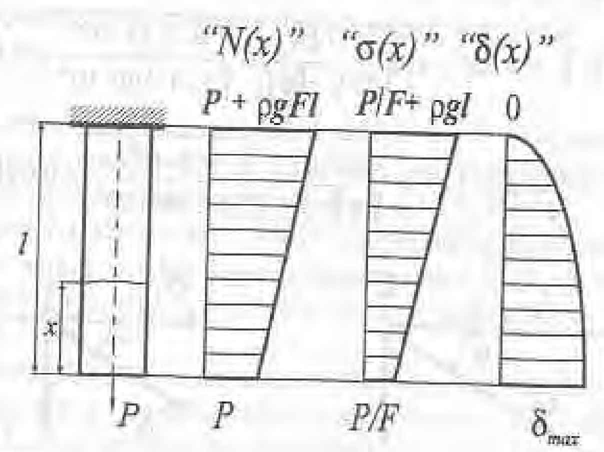


Рис. 4.16.

4.11. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

При растяжении бруса наклонные сечения, как и поперечные, остаются плоскими и параллельными. Следовательно, внутренние силы распределены по наклонным сечениям равномерно.

Нормальное напряжение в поперечном сечении растянутого или сжатого стержня есть главное напряжение s_1 или s_3. Так как отлично от нуля только одно главное напряжение, то напряженное состояние при одноосном растяжении (сжатии) является линейным. При растяжении:

$$s_1 = \sigma_{11} = \sigma_x = \frac{N}{F}, \ s_2 = s_3 = 0,$$

при сжатии:

$$s_3 = \sigma_{11} = \sigma_x = -\frac{N}{F}, \ s_1 = s_2 = 0.$$

Составляющие вектора полного напряжения по координатным осям в наклонной площадке определяются из уравнений (3.9) или (3.10):

$$n_1 = \cos\alpha; \ p_1 = p_x = \sigma_{11}n_1; \ p_2 = p_3 = 0.$$

Нормальные и касательные напряжения в наклонной площадке рассчитываются по уравнениям (3.12), (3.13). Для случая растяжения стержня

$$\sigma_\alpha = p_1n_1 = s_1n_1^2 = \frac{N}{F}\cos^2\alpha; \ \tau_\alpha = \sqrt{(s_1n_1)^2 - s_1^2n_1^4} = \frac{s_1}{2}\sin 2\alpha.$$

На площадке, наклоненной под углом $\beta = \pi/2 + \alpha$

$$\sigma_\beta = \frac{N}{F}\sin^2\alpha; \ \tau_\beta = -\frac{s_1}{2}\sin 2\alpha.$$

На рис. 4.17 показаны напряжения на наклонных площадках и построен круг Мора для случая растяжения стержня. Аналогичные построения и расчеты могут быть сделаны и для случая сжатия стержня. Следовательно, напряжения в стержне изменяются в зависимости от наклона сечения. Таким образом, конкретный пример подтверждает зависимость напряжений в точке тела от ориентировки площадки их действия. Из формул видно, что при одноосном

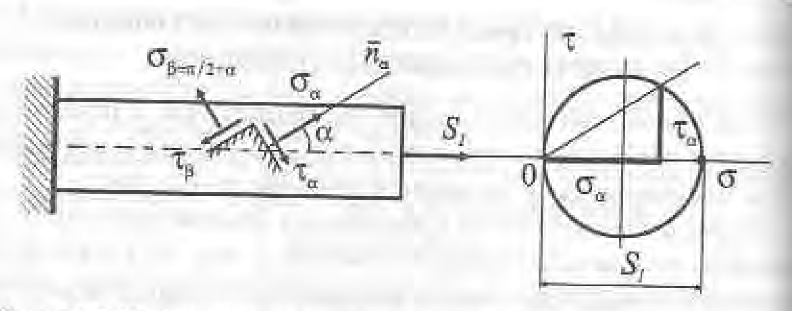


Рис. 4.17. *Напряжения на наклонных площадках*

растяжении бруса нормальные напряжения достигают наибольших значений в поперечных сечениях ($\alpha = 0$), а касательные напряжения τ_α — в сечении, наклонном к оси бруса под углом $\alpha = 45°$, причем $\tau_{max} = s_1/2$. В продольном сечении ($\alpha = 90°$) касательные и нормальные напряжения равны нулю.

Отметим, что сумма нормальных напряжений на двух любых ортогональных площадках есть величина постоянная, а касательные напряжения на этих площадках равны по величине, что является проявлением закона парности касательных напряжений.

4.12. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Внешние силы в процессе деформации тела производят работу. Часть затраченной на деформацию энергии поглощается телом и накапливается в нем в виде потенциальной энергии, называемой *потенциальной энергией деформации*. Остальная часть расходуется на необратимые процессы — нагрев тела, изменение его электромагнитных свойств и т. д. Соотношение этих двух составляющих энергии внешних сил изменяется в процессе нагружения тела.

В пределах упругих деформаций затрата энергии на необратимые процессы весьма незначительна, и поэтому можно считать, что в пределах упругости работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации. Таким образом, упругое тело является как бы аккумулятором энергии.

За пределами упругости большая часть работы внешних сил идет на необратимые процессы, причем при разгрузке выделяется лишь часть энергии, связанная с упругими деформациями тела.

При разгрузке идеально упругого тела накопленная в нем потенциальная энергия полностью расходуется на восстановление его первоначальной формы и размеров, причем эту работу производят внутренние силы. Следовательно, потенциальная энергия деформации равна работе внутренних сил упругости на перемещениях точек их приложения, и поэтому может быть выражена этими силами. Формула (3.44) дает возможность определить удельную потенциальную энергию деформации в общем случае объемного напряженного состояния. В частном случае линейного растяжения имеем:

$$u = \frac{1}{2 \cdot E}\sigma_1^2; \quad \sigma_1 = \frac{N(x)}{F(x)}; \quad u = \frac{dU}{dV}. \qquad (4.15)$$

Потенциальная энергия деформации U определяется из уравнения (4.15) интегрированием по объему:

$$U = \int_V u dV = \int_l \frac{N^2(x)}{2EF^2(x)} dx \int_F dF = \int_l \frac{N^2(x)F(x)}{2EF^2(x)} dx = \int_l \frac{N^2(x)}{2EF(x)} dx. \qquad (4.16)$$

Например, в брусе постоянного сечения при действии постоянной по длине силы P потенциальная энергия равна

$$U = \frac{P^2 l}{2EF}. \qquad (4.17)$$

4.13. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Вблизи различного рода отверстий, надрезов, выточек, т.е. мест резкого изменения размеров поперечных сечений распределение напряжений неравномерно, и возникают зоны повышенных напряжений. Например, при одноосном равномерном растяжении напряжениями σ тонкой пластинки шириной H с небольшим($d \le H/5$) круглым отверстием распределение напряжений по поперечному сечению, проходящему через центр отверстия, оказывается неравномерным с пиками напряжений в точках A и B контура отверстия (рис. 4.18). Точное решение показывает, что нормальные напряжения в радиальных сечениях на контуре отверстия изменяются по закону $\sigma_\theta = \sigma(1 - 2\cos 2\theta)$ и в точках A и B при $\theta = \pi/2$ достигают ве-

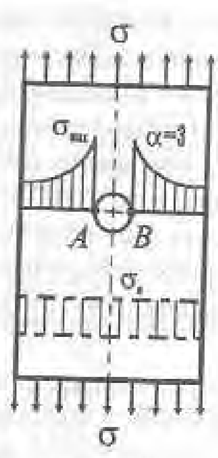


Рис. 4.18. *Концентрация напряжений*

личины $\sigma_{max} = 3\sigma$, а при $\theta = 0$, т. е. в сечении, параллельном линии действия нагрузки, действуют сжимающие напряжения $\sigma_\theta = -\sigma$, равные по величине приложенным к пластинке напряжениям.

Неравномерность распределения напряжений по поперечному сечению имеет место и при центральном растяжении ступенчатого бруса (рис. 4.19), причем максимальные напряжения быстро увеличиваются по мере уменьшения радиуса закругления переходной части (галтели). Большие местные напряжения возникают также в зоне контакта деталей. Они называются контактными напряжениями.

Возникновение значительных местных напряжений называется концентрацией напряжений, а их причина - концентратором напряжений. Концентрация напряжений характеризуется *теоретическим коэффициентом концентрации* α, который равен отношению действительного напряжения σ_{max} в наиболее напряженной точке к номинальному напряжению $\sigma_н$ в той же точке:

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_н} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{\tau_{max}}{\tau_н}.$$

Номинальными напряжениями называются напряжения, вычисляемые по формулам сопротивления материалов, не учитывающим концентрации напряжений. В тех случаях, когда возникают трудно-

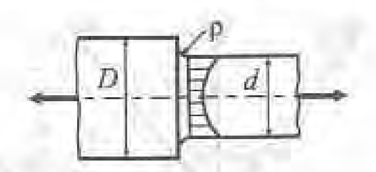


Рис. 4.19. *Неравномерное распределение напряжений при растяжении ступенчатого бруса*

сти в вычислении номинальных напряжений в сечении с концентратором напряжений, за номинальные принимают напряжения в неослабленном сечении детали.

В настоящее время с помощью теории упругости и экспериментальными методами (испытанием образцов из оптически активного материала в поляризованном свете) определены величины коэффициентов концентрации для многих случаев. Формулы, таблицы и графики для определения коэффициентов концентрации приводятся в справочной литературе.

4.14. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Задачи, в которых все реакции связей определяются из условий равновесия, называются статически определимыми. Если число неизвестных реакций связей превышает число уравнений равновесия, задача становится **статически неопределимой**. Степенью статической неопределимости называется разность между числом искомых неизвестных усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые для данной системы можно составить. Для решения статически неопределимых задач к уравнениям равновесия добавляют **условия совместности деформаций,** т.е. уравнения, связывающие между собой деформации или перемещения отдельных частей тела.

Пример 4.4. Проверить прочность стержней и определить перемещение узла A под действием груза $P = 3\cdot10^4$ Н. (рис. 4.20.).

Дано: $\alpha = 30°$, $l_2 = 1$ м, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2\cdot10^5$ МПа, $F = 1$см^2, материал и сечения стержней одинаковы.

Данная система один раз статически неопределима, так как для вычисления усилий в трех ее стержнях можно составить лишь два независимых уравнения равновесия узла A.

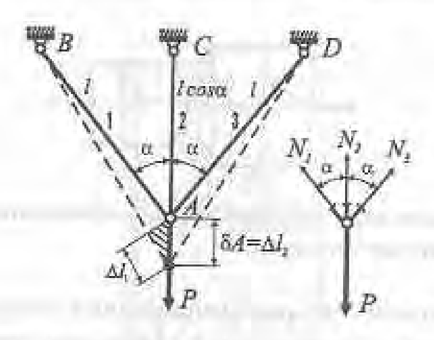


Рис. 4.20.

1. Статическая сторона задачи.

$$\sum X = 0;\ N_3 \sin\alpha - N_1 \sin\alpha = 0;\ N_1 = N_3 = N;$$

$$\sum Y = 0;\ N_1 \cos\alpha + N_2 + N_3 \cos\alpha - P = 0;\ N_2 = P - 2N\cos\alpha.$$

2. Геометрическая сторона задачи (условия совместности деформаций).

Система после деформации показана на рис. 4.20, *a*. Удлинение крайнего стержня 1 можно найти, проведя дугу радиусом *AB* из центра *B*. Вследствие малости деформаций дугу можно заменить перпендикуляром, опущенным из точки *A* на новое положение стержня. Изменениями угла α пренебрегаем, так как оно незначительно, тогда между удлинениями стержней 1 и 2 существует связь

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\alpha.$$

3. Физическая сторона задачи.

Согласно закону Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1};\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2},$$

с учетом уравнения совместности деформаций, имеем:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}\cos\alpha \quad \text{или} \quad N_1 = N_2 \cos^2\alpha.$$

Решая совместно уравнения равновесия и уравнение совместности деформаций, находим усилия в стержнях

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha} = \frac{3\cdot 10^4}{1 + 2(0{,}866)^3} = 1{,}31\cdot 10^4 \ \text{Н};$$

$$N_1 = N_3 = \frac{P\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} = \frac{3\cdot 10^4 (0{,}866)^2}{1 + 2(0{,}866)^3} = 0{,}98\cdot 10^4 \ \text{Н}.$$

Наибольшее напряжение действует во втором стержне:

$$\sigma = \frac{N_2}{F} = \frac{1{,}31\cdot 10^4}{10^{-4}} = 131 \ \text{МПа},$$

что меньше заданного допускаемого напряжения $[\sigma]$ = 160 МПа. Перемещение узла *A* равно удлинению второго стержня:

$$\delta_A = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{1{,}31\cdot 10^4\cdot 1}{2\cdot 10^{11}\cdot 10^{-4}} = 0{,}655\cdot 10^{-3} \ \text{м}.$$

Пример 4.5. Определить напряжения в стержнях, возникающие в результате повышения температуры всех стержней на 100° C (рис. 4.21). Балка считается абсолютно жесткой. Дано:

$l_{ст} = l_м$; $\alpha_м = 1{,}65\cdot 10^{-5}$ 1/град; $\alpha_{ст} = 1{,}25\cdot 10^{-5}$ 1/град; $E_{ст} = 2\cdot 10^5$ МПа; $E_м = 1\cdot 10^5$ МПа; $F_м = 2$ см^2; $F_{ст} = 1$ см^2.

1. Статическая сторона задачи.

$$\Sigma M_A = 0;\ N_м a + N_{ст} 2a = 0;\ N_{ст} = -2N_м.$$

2. Геометрическая сторона задачи (условия совместности деформаций).

В результате термического расширения стержней балка займет новое положение (рис.4.21, а). Поэтому условие совместности деформаций будет

$$\Delta l_{ст} = 2\Delta l_м.$$

3. Физическая сторона задачи.

Коэффициент температурного расширения медного стержня больше, чем стального. Следовательно, в случае раздельной деформации медный стержень удлинился бы больше, чем стальной. Но так как они связаны абсолютно жесткой балкой, то медный стер-

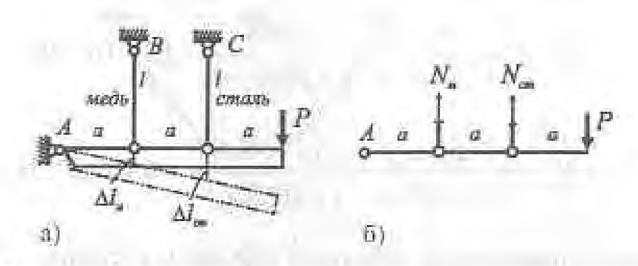


Рис. 4.21.

жень, удлиняясь из-за термического воздействия, одновременно сокращается от механического воздействия со стороны балки. Стальной стержень же стержень удлиняется и из-за термического расширения, и под воздействием балки. Абсолютная деформация стержней может быть представлена как сумма силовой и температурной деформаций:

$$\Delta l_{ст} = \alpha_{ст} l_{ст} \Delta t + \frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} F_{ст}},$$

$$\Delta l_м = \alpha_м l_м \Delta t + \frac{N_м l_м}{E_м F_м}.$$

Решая данные уравнения совместно с уравнениями равновесия и геометрическими соотношениями, получим:

$$N_{ст} = \frac{\Delta t(2\alpha_м - \alpha_{ст})E_м F_м E_{ст} F_{ст}}{4E_{ст} F_{ст} + E_м F_м} = 8200 \text{ Н}, \; N_м = -2N_{ст} = -16400 \text{ Н}.$$

$$\sigma_м = \frac{N_м}{F_м} = \frac{-16400}{2 \cdot 10^{-4}} = -82 \text{ МПа}, \; \sigma_{ст} = \frac{N_{ст}}{F_{ст}} = \frac{8200}{1 \cdot 10^{-4}} = 82 \text{ МПа}.$$

Пример 4.6. Определить напряжения в стержнях, возникающие при сборке узла A из-за неточности изготовления стержней (рис. 4.22). Дано: $F_1 = F_2$; $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа; $l_1 = l_2 = 1$ м; $\alpha = 30°$; $\delta = 1$ мм.

1. **Статическая сторона задачи.**

$$\Sigma Y = 0; \; N_1 - 2N_2 \cos\alpha = 0; \; N_1 = 2N_2 \cos\alpha.$$

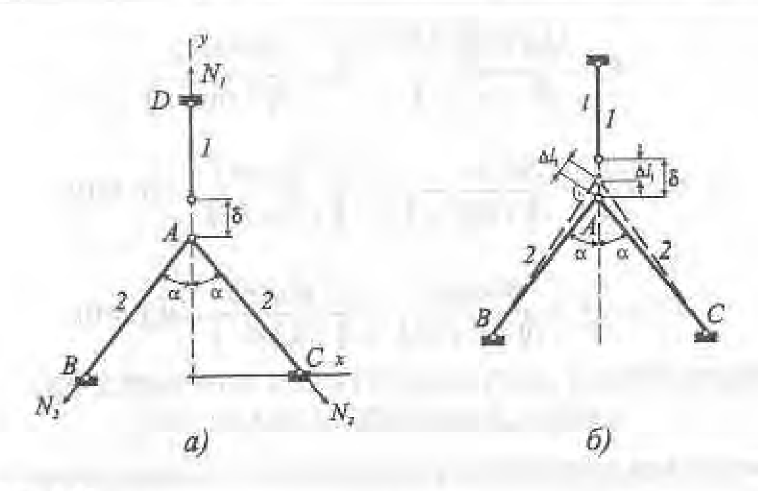


Рис. 4.22.

2. Геометрическая сторона задачи (условия совместности деформаций).

Предположим, что после соединения, шарнир A займет положение A_1 (рис. 4.22 б). Следовательно, условие совместности деформаций:

$$\Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} = \delta.$$

Удлинение Δl_2 можно получить, если из точки B описать дугу радиусом l_2, однако в силу малости деформаций, достаточно опустить перпендикуляр из точки A на новое положение стержня 2. В собранном состоянии угол между стержнями 2 будет меньше, чем 2α, но, из-за малых деформаций, изменение угла отразится на пятом или шестом знаке значения косинуса, что не существенно.

3. **Физическая сторона задачи.**

Согласно закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \; \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$N_1 = \frac{2\delta EF\cos^2\alpha}{l\left(1+\cos^2\alpha\right)},\qquad N_2 = \frac{\delta EF\cos\alpha}{l\left(1+\cos^2\alpha\right)},$$

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{F} = \frac{2\delta E\cos^2\alpha}{l\left(1+\cos^2\alpha\right)} = \frac{2\cdot 10^{-3}\left(0{,}866\right)^2}{1\cdot\left(1+0{,}866^2\right)} = 120\ \text{МПа},$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{F} = \frac{\delta E\cos\alpha}{l\left(1+\cos^2\alpha\right)} = \frac{10^{-3}\left(0{,}866\right)}{1\cdot\left(1+0{,}866^2\right)} = 69{,}3\ \text{МПа}.$$

Глава 5. СДВИГ (СРЕЗ)

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ, НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ СДВИГЕ

Сдвигом называется такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях из шести составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил, от нуля отличается только поперечная сила. Данный вид нагружения встречается редко и чаще всего он сопровождается изгибающими моментами. Однако, в некоторых случаях, например, в заклепочных и сварных соединениях при раскройных работах имеет место близкое к сдвигу нагружение бруса (рис. 5.1).

Внутренняя поперечная сила Q в поперечном сечении бруса на участке действия сосредоточенных сил определяется методом сечений и равна P. Если расстояние между сосредоточенными силами (например, расстояние между ножами при раскрое материала) мало, то можно пренебречь величиной изгибающего момента. При этом распределение касательных напряжений по сечению неравномерно,

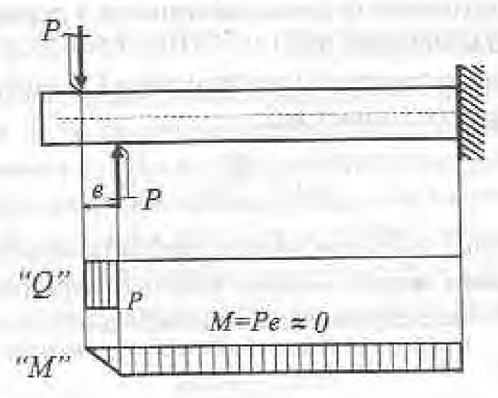


Рис. 5.1. *Сдвиг (срез)*

так как внешняя поверхность бруса свободна от осевой нагрузки и по закону парности касательных напряжений, в верхних и нижних точках сечения касательные напряжения равны нулю (рис. 5.2, а, б).

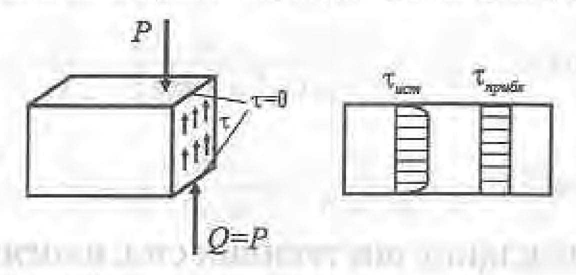


Рис. 5.2. *Распределение касательных напряжений*

Как показывают исследования, распределение касательных напряжений весьма близко к равномерному закону (рис. 5.2, б) и поэтому в первом приближении для упрощения расчетов заменяется равномерным законом распределения. Тогда на основании системы уравнений (3.5)

$$Q = \int_F \tau dF;\ \tau = const;\ Q = \tau F.$$

Таким образом, касательное напряжение при сдвиге (срезе) определяется уравнением

$$\tau = \frac{Q}{F}, \qquad (5.1)$$

где F — площадь среза.

Деформация бруса при сдвиге в зоне действия усилия, предшествующая разрушению от среза, заключается в перекашивании прямых углов элемента (рис. 5.3).

Аналогично растяжению (сжатию) закон Гука при сдвиге в абсолютных координатах имеет вид:

$$\delta = \frac{Qh}{GF}, \qquad (5.2)$$

где G — модуль сдвига или модуль упругости второго рода.

Модуль сдвига связан с модулем упругости первого рода и коэффициентом Пуассона следующим, что подтверждают опыты, уравнением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (5.3)$$

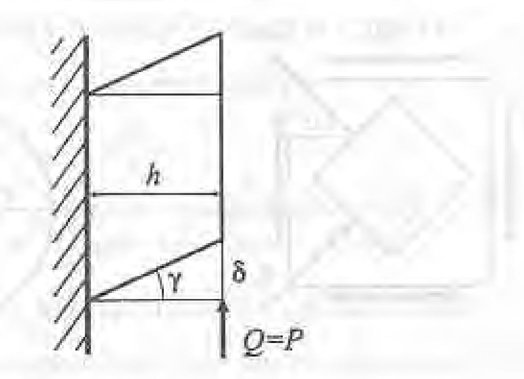


Рис. 5.3. *Деформация бруса при сдвиге*
δ — абсолютный сдвиг;
$\mathrm{tg}\gamma = \gamma \approx \delta / h$ — относительный сдвиг или угол сдвига

Для стали модуль сдвига примерно равен $8 \cdot 10^4$ МПа.

Из уравнения (5.2) с учетом (5.1) может быть получен закон Гука при сдвиге в относительных координатах:

$$\gamma = \tau / G \qquad (5.4)$$

или

$$\tau = \gamma G. \qquad (5.5)$$

Закон Гука справедлив лишь до предела пропорциональности. При испытаниях на сдвиг образцов из пластичных материалов так же, как и при растяжении, имеет место явление текучести. Предел текучести обозначается τ_T, а предел прочности – τ_B.

5.2. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ СДВИГЕ

Если по граням элемента действуют только касательные напряжения (рис. 5.4, а), то такой вид напряженного состояния называется **чистым сдвигом**. Площадки, по которым действуют только касательные напряжения, называются **площадками чистого сдвига**.

Напряженное состояния при чистом сдвиге можно получить из формул (3.25), (3.27), принимая $\sigma_{11} = \sigma_x = \sigma_{22} = \sigma_y = 0$, а $\sigma_{12} = \tau = Q/F$. Из уравнения (3.25) следует, что при чистом сдвиге главные напряжения равны по значению и противоположны по знаку:

$$s_1 = \tau,\ s_3 = -\tau,\ s_2 = 0, \qquad (5.6)$$

т.е. одно главное напряжение растягивающее, другое – сжимающее.

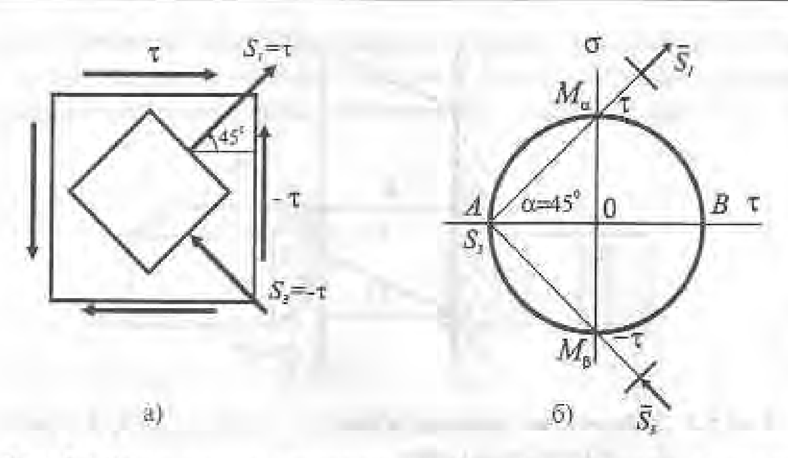


Рис. 5.4. *Напряженное состояние чистого сдвига а) и круг Мора для чистого сдвига б)*

Анализ показывает, что при чистом сдвиге возникает **плоское напряженное состояние**. Главные площадки наклонены под углом 45° к направлению площадок чистого сдвига ($tg2\alpha_0 = \infty$).

На рис. 5.4, б построен круг Мора для случая чистого сдвига.

5.3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

Удельная потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге определяется из уравнения (3.44):

$$u = \frac{\tau^2}{2 \cdot G}; \; \tau = \frac{Q}{F}; \; u = \frac{dU}{dV} \tag{5.7}$$

Потенциальная энергия деформации U определяется из уравнения (5.7) интегрированием по объему:

$$U = \int_V u dV = \int_l \frac{Q^2(x)}{2GF^2(x)} dx \int_F dF = \int_l \frac{Q^2(x)F(x)}{2GF^2(x)} dx = \int_l \frac{Q^2(x)}{2GF(x)} dx. \tag{5.8}$$

Например, для бруса постоянного сечения при действии постоянной по длине поперечной силы

$$U = \frac{Q^2 h}{2GF} \tag{5.9}$$

5.4. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СДВИГЕ

Условие прочности при сдвиге имеет вид:

$$\tau = \frac{Q}{F} \le [\tau], \tag{5.10}$$

где $[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение, которое в первом приближении принимается равным $[\tau] = (0,5...0,6)[\sigma]$.

5.5. РАСЧЕТ ЗАКЛЕПОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ

На рис. 5.5 показано соединение двух листов заклепками (соединение внахлест), которое разрушается в результате перерезывания заклепок по линии соприкосновения листов. Если разрушение каждой заклепки происходит по одной плоскости среза, то заклепочное соединение называется **односрезным**, если по двум плоскостям, то соединение называется **двухсрезным** и т.д.

Для упрощения задачи принимаем, что по плоскостям среза действуют только касательные напряжения, которые распределяются по поверхности среза равномерно, а также что при действии статической нагрузки можно принять поперечную силу в каждой заклепке равной

$$Q = \frac{P}{n}, \tag{5.11}$$

где P — сила, действующая на соединение; n — число заклепок.

Условие прочности заклепок на срез:

$$\tau = \frac{P}{nF} \le [\tau], \tag{5.12}$$

где $F = \pi d^2/4$ - площадь поперечного сечения заклепки диаметром d, $[\tau] = (0,6...0,8)[\sigma]$ — допускаемое касательное напряжение.

При двухсрезном или многосрезном заклепочном соединении вместо n в формулу (5.12) следует подставлять общее число срезов заклепок, расположенных по одну сторону стыка.

Заклепочные соединения рассчитывают также на смятие. Проверяют напряжения смятия по площади соприкосновения соединяемых листов и заклепок. Для приближенного расчета истинная эпюра распределения сжимающих напряжений смятия заменяется приближенной равномерной эпюрой (рис. 5.6). Площадь смятия одной заклепки принимают равной $F_{см} = dt$, где t — толщина соединяемых листов.

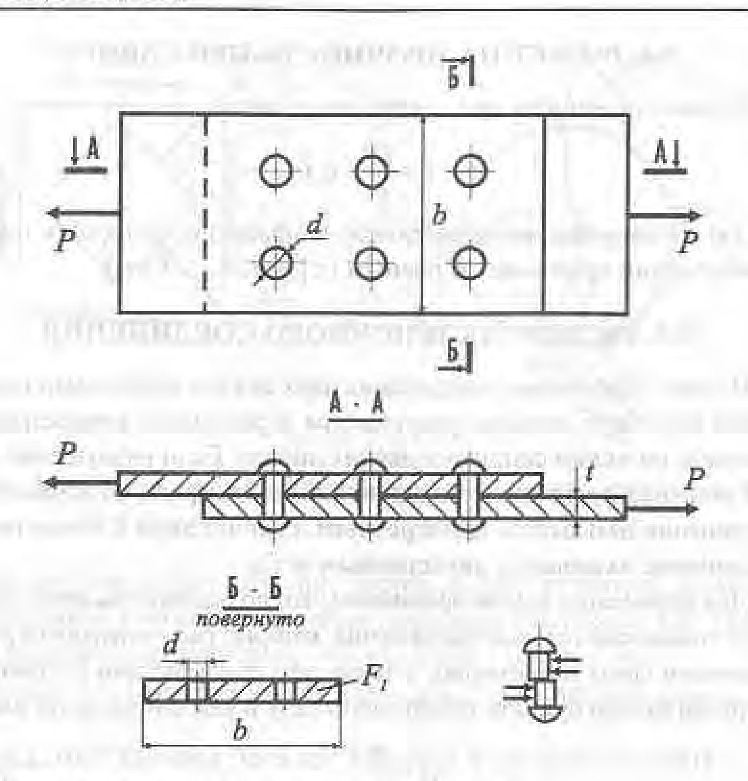


Рис.5.5. *Соединение двух листов заклепками*

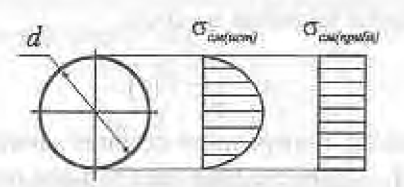


Рис. 5.6. *Распределение напряжений смятия*

Условие прочности на смятие имеет вид:

$$\frac{P}{ndt} \le [\sigma_{см}], \qquad (5.13)$$

$[\sigma_{см}] = (2\ldots2{,}5)[\sigma]$ — допускаемое напряжение на смятие.

В случае склепывания внахлест двух листов различной толщины принимают $t = t_{min}$.

Условие прочности листа на разрыв:

$$\sigma = \frac{P}{F_1} = \frac{P}{t(b - n_1 d)} \le [\sigma], \qquad (5.14)$$

где F_1 — площадь сечения листа по ряду заклепок в направлении, перпендикулярном линии действия силы P; n_1 — число заклепок в этом сечении; b — ширина листа (см. рис. 5.5).

Пример 5.1. Обосновать соотношение между диаметром d и высотой головки h болта (рис. 5.7), если $[\tau] = 0{,}6[\sigma]$.

Срез головки болта происходит по цилиндрической поверхности $F_{ср} = \pi dh$. Условие прочности на срез имеет вид:

$$\tau = \frac{Q}{F_{ср}} = \frac{P}{\pi dh} \le [\tau].$$

Условие прочности на растяжение стержня:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{4P}{\pi d^2} \le [\sigma].$$

Предельное отношение касательных и нормальных напряжений определяет искомое соотношение между высотой головки болта и его диаметром:

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\pi d^2}{4\pi dh} = \frac{d}{4h} = \frac{[\tau]}{[\sigma]} = 0{,}6; \quad \frac{d}{h} = 2{,}4.$$

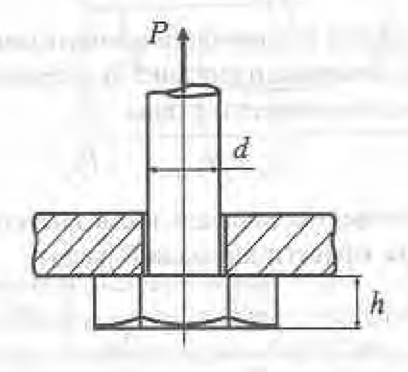


Рис. 5.7.

Глава 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

На рис. 6.1 изображено произвольное сечение F, отнесенное к некоторой системе координат (y, z), где F — величина площади сечения; dF — элементарная часть этой площади; y, z — координаты элементарной площадки; ρ — радиус-вектор dF; C — центр тяжести площади сечения.

Площадь F, ограниченная произвольной кривой, определяется по формуле

$$F = \int_F dF. \tag{6.1}$$

Статические моменты площади F относительно осей y и z равны

$$S_y = \int_F z dF, \; S_z = \int_F y dF. \tag{6.2}$$

Единица измерения статического момента сечения — м^3.

Если известна величина площади F и координаты ее **центра тяжести**, то статические моменты равны

$$S_y = F z_c, \quad S_z = F y_c. \tag{6.3}$$

Отсюда, если известна площадь и статические моменты, то **координаты центра тяжести** площади F равны

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\int_F z dF}{F}, \; y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\int_F y dF}{F}. \tag{6.4}$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются **центральными**. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

Центр тяжести сечения, имеющего ось симметрии, находится на этой оси.

Осевые моменты инерции площади F равны

$$I_y = \int_F z^2 dF, \; I_z = \int_F y^2 dF. \tag{6.5}$$

Центробежный момент инерции площади F определяется по формуле

$$I_{yz} = \int_F yz dF. \tag{6.6}$$

Полярный (относительно начала координат) момент инерции площади F равен

$$I_p = \int_F \rho^2 dF. \tag{6.7}$$

Так как $\rho^2 = y^2 + z^2$, то

$$I_p = I_y + I_z. \tag{6.8}$$

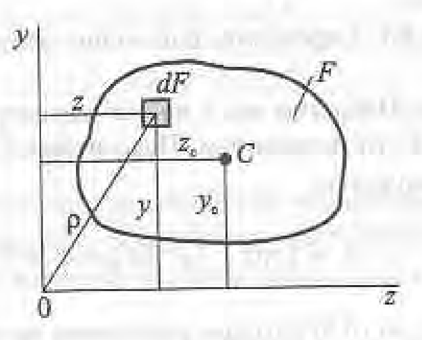


Рис. 6.1.

Единица измерения моментов инерции — м^4.

Осевые моменты инерции всегда можно представить как произведения площади фигуры на квадраты некоторых вспомогательных величин, измеряемых в метрах и называемых радиусами инерции. Следовательно, **радиусы инерции сечения** относительно осей y и z равны

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}}. \qquad (6.9)$$

Осевые и полярный моменты инерции, представляющие собой пределы сумм положительных величин, всегда положительны, а центробежный момент инерции может быть и положительным, и отрицательным, а также равным нулю, так как координаты y и z входят в его выражение в первых степенях.

Из выражений для статических моментов и моментов инерции следует, что моменты инерции и статические моменты фигуры относительно каких-либо осей равны суммам соответствующих моментов всех ее частей относительно тех же осей. Это свойство будет использоваться в дальнейшем при расчете сложных сечений, которые можно разбить на простые фигуры.

Моменты инерции и статические моменты сечения зависят от формы и размеров сечения, а также от расположения осей координат. Какого-либо геометрического смысла эти величины не имеют. Поэтому формулы (6.1) и (6.9) следует рассматривать как определения этих геометрических величин. Названия же им даны по формальной аналогии с динамическими моментами инерции тела и моментами сил.

Пример 6.1. Определить положение центра тяжести полукруга (рис. 6.2).

Решение. Направим ось y по оси симметрии полукруга, а ось z совместим с его основанием. Подсчитаем S_z интегрированием по площади полукруга:

$$S_z = \int_F y dF = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3} R^3.$$

Из формулы (6.4) находим расстояние до центра тяжести от основания полукруга:

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{2R^3}{3\pi R^2/2} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}.$$

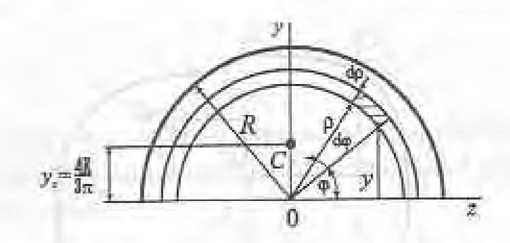


Рис. 6.2.

6.2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

Пусть известны осевые I_{y_c}, I_{z_c} и центробежный $I_{z_c y_c}$ моменты инерции сечения относительно его центральных осей и требуется определить моменты инерции I_y, I_z, I_{zy} того же сечения относительно осей y и z, параллельных данным центральным (рис. 6.3). Из формул (6.5) и (6.6) следует

$$I_z = \int_F (y + y_c)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2y_c \int_F y dF + y_c^2 \int_F dF.$$

$$I_z = I_{z_c} + 2y_c S_{z_c} + y_c^2 F. \qquad (6.10)$$

$$I_y = I_{y_c} + 2z_c S_{y_c} + z_c^2 F. \qquad (6.11)$$

$$I_{yz} = I_{z_c y_c} + y_c S_{y_c} + z_c S_{z_c} + y_c z_c F. \qquad (6.12)$$

Так как относительно центральных осей статические моменты S_{z_c}, S_{y_c} равны нулю, получаем следующую зависимость между моментами инерции при переходе от центральных осей к параллельным осям:

$$I_z = I_{z_c} + y_c^2 F, \qquad (6.13)$$

$$I_y = I_{y_c} + z_c^2 F, \qquad (6.14)$$

$$I_{yz} = I_{z_c y_c} + y_c z_c F. \qquad (6.15)$$

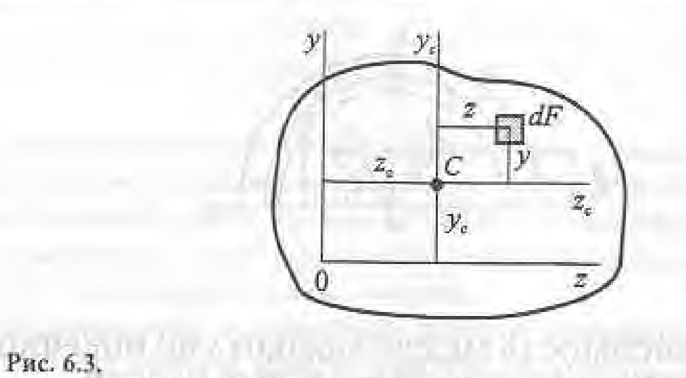


Рис. 6.3.

Если исходные оси не являются центральными, в формулах (6.10), (6.11), (6.12) сохраняются слагаемые с S_z и S_y.

Из формул (6.13), (6.14), (6.15) видно, что наименьшее значение имеют осевые моменты инерции относительно центральных осей сечения, так как величины y_c^2F и z_c^2F всегда положительны. Центробежный момент при переходе от центральных осей к нецентральным осям может увеличиваться или уменьшаться. Это зависит от знака произведения координат z_c и y_c.

Пример 6.2. Определить моменты инерции прямоугольника (рис. 6.4, а), параллелограмма (рис. 6.4, б), треугольника (рис. 6.5), круга (рис. 6.6), кольца (рис. 6.7).

Решение. Выделим элементарную полоску площадью $dF = bdy$ и подставим это значение dF в интеграл (6.5):

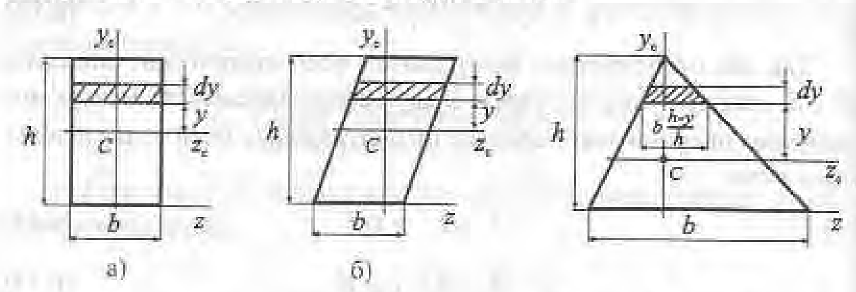


Рис. 6.4. *К определению моментов инерции прямоугольника а) и параллелограмма б)*

Рис. 6.5. *К определению моментов инерции треугольника*

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции прямоугольника и параллелограмма с основанием b и высотой h относительно центральной оси, параллельной основанию, равен

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12}. \qquad (6.16)$$

Моменты инерции этих фигур относительно осей, проходящих через основание, находим по формуле (6.13):

$$I_z = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}. \qquad (6.17)$$

Моменты инерции прямоугольника относительно осей y_c и y вычисляются по формулам (6.16) и (6.17), где b заменяется на h, а h на b:

$$I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}. \qquad (6.18)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{3}. \qquad (6.19)$$

Для определения момента инерции треугольника выделим элементарные полоски, параллельные его основанию (рис. 6.5). Площадь такой полоски

$$dF = b\frac{h-y}{h}dy.$$

Момент инерции треугольника относительно оси, проходящей через основание,

$$I_z = \int_0^h b\frac{h-y}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}. \qquad (6.20)$$

Момент инерции треугольника относительно центральной оси, параллельной основанию с учетом формул (6.13), (6.14), (6.15), равен

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}. \qquad (6.21)$$

Для определения момента инерции круга диаметром d (рис. 6.6) подсчитаем сначала полярный момент инерции круга. Для этого выделим в сечении окружностями радиуса ρ и $\rho + d\rho$ элементарное кольцо площадью $dF = 2\pi\rho d\rho$ и вычислим I_p по формуле (6.7):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}, \qquad (6.22)$$

или

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}. \qquad (6.23)$$

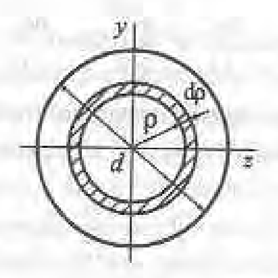


Рис. 6.6. *К определению моментов инерции круга*

Осевые моменты инерции круга найдем по формуле (6.8):

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \qquad (6.24)$$

Моменты инерции полукруга относительно оси симметрии y и оси z, проходящей через его основание (рис. 6.2), будут одинаковы и равны половине момента инерции круга

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{128}, \qquad (6.25)$$

а моменты инерции четверти круга

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{256}. \qquad (6.26)$$

Осевой момент инерции толстостенного кольца с внешним D и внутренним d диаметрами (рис. 6.7) относительно центральной оси может быть найден как разность моментов инерции большого и малого кругов:

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4), \qquad (6.27)$$

где $\alpha = d/D$ — коэффициент полости.

Полярный момент инерции кольца находится аналогично:

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4). \qquad (6.28)$$

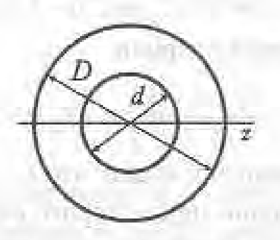


Рис. 6.7. *К определению моментов инерции кольца*

6.3. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Пусть задана система координат и известны моменты инерции I_z, I_y и I_{zy} фигуры относительно осей координат. Повернем оси координат на некоторый угол α против часовой стрелки и определим моменты инерции той же фигуры относительно новых осей u и v.

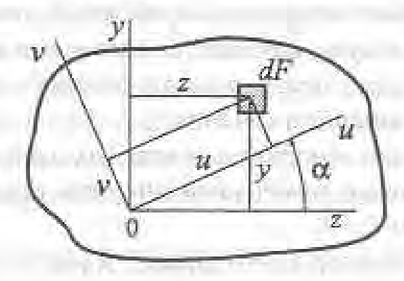


Рис. 6.8.

Координаты точки в этих системах координат связаны уравнениями

$$u = z\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$v = y\cos\alpha - z\sin\alpha.$$

Момент инерции

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 dF = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha -$$
$$-2I_{yz}\sin\alpha\cos\alpha,$$

или

$$I_u = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \qquad (6.29)$$

и

$$I_v = I_z\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha. \qquad (6.30)$$

Центробежный момент инерции

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha. \qquad (6.31)$$

Из полученных уравнений видно, что $I_u + I_v = I_z + I_y$, т. е. сумма осевых моментов инерции при повороте осей координат остается величиной постоянной. Поэтому, если относительно какой-либо оси момент инерции достигает максимума, то относительно перпендикулярной ей оси он имеет минимальное значение.

6.4. ГЛАВНЫЕ ОСИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Из формул (6.29), (6.30), (6.31) видно, что при повороте осей координат центробежный момент инерции меняет знак, а, следовательно, существует такое положение осей, при котором центробежный момент равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения обращается в нуль, называются **главными осями**, а главные оси, проходящие через центр тяжести сечения - **главными центральными осями инерции сечения**.

Моменты инерции относительно главных осей инерции сечения называются **главными моментами инерции сечения** и обозначаются I_1 и I_2, причем $I_1 > I_2$.

Предположим, что оси u и v главные. Тогда

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha = 0,$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \qquad (6.32)$$

Уравнение (6.32) определяет положение главных осей инерции сечения в данной точке относительно исходных осей координат. При повороте осей координат изменяются также и осевые моменты инерции. Найдем положение осей, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений. Для этого возьмем первую производную от I_u по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -(I_z - I_y)\sin 2\alpha - 2I_{yz}\cos 2\alpha = 0,$$

тогда

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}.$$

К тому же результату приводит и условие $dI_v/d\alpha$. Сравнивая последнее выражение с формулой (6.32), можно сделать вывод, что главные оси инерции являются осями, относительно которых осевые моменты инерции сечения достигают экстремальных значений.

Исключая из формул (6.29), (6.30), (6.31) тригонометрические функции, получим:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \qquad (6.33)$$

Знак плюс в формуле (6.33) соответствует большему (I_1), а знак минус — меньшему (I_2) моментам инерции сечения.

Нетрудно доказать, что если моменты инерции сечения относительно главных осей одинаковы, то все оси, проходящие через ту же точку сечения, являются главными и осевые моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы: $I_u = I_v = I_y = I_z$. Этим свойством обладают квадратные, круглые и кольцевые сечения.

6.5. МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ

Осевым **моментом сопротивления** площади сечения F относительно главной центральной оси называется отношение момента инерции площади относительно этой же оси к расстоянию до наиболее удаленной точки от этой оси

$$W_1 = \frac{I_1}{|v_{\max}|},\ W_2 = \frac{I_2}{|u_{\max}|}. \qquad (6.34)$$

Момент сопротивления измеряется в м^3. Отношение полярного момента инерции площади сечения к наибольшему радиусу – вектору этой площади, называется **полярным моментом сопротивления**

$$W_p = \frac{I_p}{|\rho_{\max}|}. \qquad (6.35)$$

Для площади прямоугольника

$$W_z = \frac{bh^2}{6};\ W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Для площади круга

$$W_{oc} = W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32},\ W_p = \frac{\pi d^3}{16},\ W_p = 2W_{oc}$$

Глава 7. КРУЧЕНИЕ

7.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ ПРИ КРУЧЕНИИ

Кручением называется такой вид нагружения бруса, при котором из шести составляющих главного вектора и главного момента внутренних сил не равен нулю только крутящий момент. При кручении бруса его поперечные сечения поворачиваются относительно друг друга, вращаясь вокруг оси бруса. Вызывается кручение парами сосредоточенных сил и распределенных вдоль оси бруса, действующих в плоскостях, перпендикулярных этой оси.

Брус, работающий на кручение, называется **валом**. Моменты, вызывающие деформацию кручения, называются крутящими моментами. Величина крутящего момента, действующего в каком-либо сечении вала, определяется методом сечений (рис. 7.1). Величина крутящего момента может быть задана мощностью, передаваемой на вал, например через шкив:

$$N = M_{кр} \cdot \omega, \qquad (7.1)$$

где N — мощность, передаваемая на вал [Вт]; $\omega = 2\pi n/60$ [рад/сек] — угловая частота вращения вала; n — частота вращения вала [мин$^{-1}$]. Если мощность задана в лошадиных силах, для перевода в систему Си следует помнить, что 1 л.с. = 736 Вт.

7.2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Под действием внешнего скручивающего момента, приложенного на одном конце вала (рис. 7.2), другой конец которого жестко закреплен, стержень будет закручиваться. При этом любое сечение стержня, оставаясь плоским, будет поворачиваться на некоторый

угол φ_x — угол закручивания, который по длине вала изменяется от нуля (в заделке) до его максимального значения на свободном конце вала. При этом образующая внешней цилиндрической поверхности вала повернется на угол γ — угол сдвига, который вдоль радиуса сечения изменяется от нуля (на оси) вала до его максимального значения на внешней поверхности.

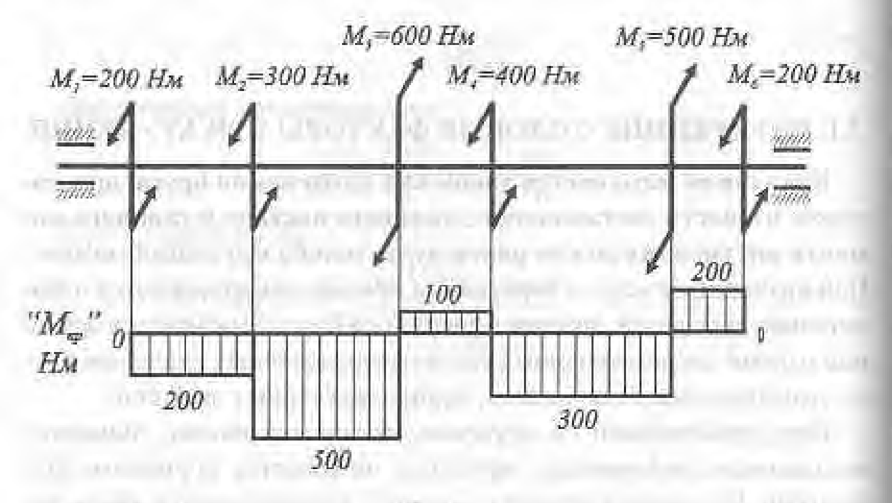


Рис. 7.1.

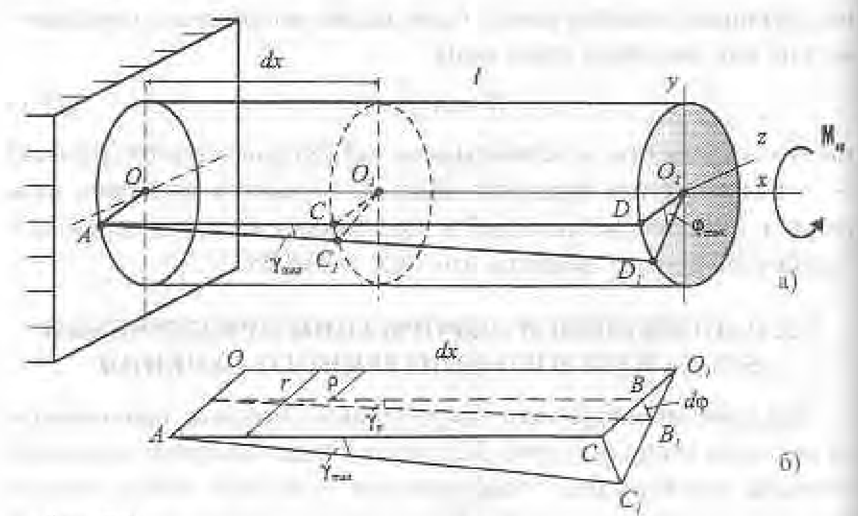


Рис. 7.2.

После закручивания бруса круглого сечения поперечные линии, нанесенные на его поверхности, остаются плоскими, а диаметры сечений и расстояния между ними не изменяются. При этом прямоугольная сетка превратится в сетку, состоящую из параллелограммов, что свидетельствует о наличии касательных напряжений в поперечных сечениях бруса, а по закону парности касательных напряжений – и в продольных его сечениях, т.е. напряженное состояние в точках скручиваемого стержня представляет собой **чистый сдвиг**. На основании опыта вводятся следующие **гипотезы:**

1. Нормальные напряжения в поперечных сечениях отсутствуют (иначе изменялись бы расстояния между сечениями).
2. Поперечные сечения при кручении остаются плоскими.
3. Радиусы в поперечных сечениях остаются прямолинейными (не искривляются).

Рассмотрим, вырезанный из вала клиновидный элемент (рис. 7.2 б) длиной dx. Из рисунка видно, что

$$\gamma_\rho dx = d\varphi\rho, \quad \gamma_{max} dx = d\varphi\, r,$$

следовательно

$$\tau_\rho = \tau_{max}\frac{\rho}{r}, \tag{7.2}$$

т.е. угол сдвига изменяется по радиусу вала по линейному закону.

Согласно закону Гука при сдвиге (3.34)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

откуда

$$\tau_\rho = \tau_{max}\frac{\rho}{r}, \tag{7.3}$$

т.е. касательные напряжения в сечении вала изменяются по радиусу по линейному закону.

При чистом кручении все внутренние силы, распределенные по поперечному сечению, приводятся к одной составляющей – крутящему моменту относительно нормальной к сечению оси. **Касательные напряжения перпендикулярны радиусам**, проведенным через точки их действия (рис. 7.3).

Доказывать это будем методом от противного, т.е. предположим, что касательное напряжение не перпендикулярно радиусу. Тогда в

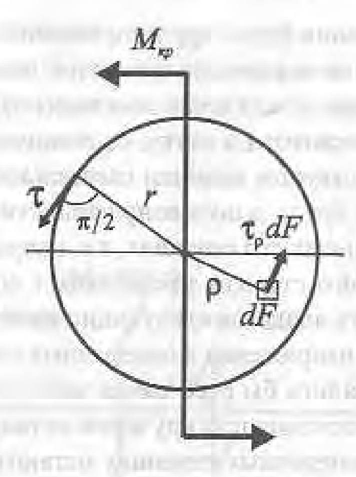


Рис. 7.3.

каждой точке сечения, кроме касательных напряжений, перпендикулярных радиусам, действуют радиально направленные касательные напряжения. Но если это так, то по закону парности и на цилиндрической поверхности радиуса ρ или r будет действовать касательное напряжение, что неверно, так как на боковой поверхности нет напряжений.

Крутящий момент в сечении бруса определяется уравнением (3.5):

$$M_{кр} = M_x = \int_F (z\tau_{xy} - y\tau_{xz})dF$$

или

$$M_{кр} = \int_F \rho\tau_\rho \cdot dF, \qquad (7.4)$$

где ρ — плечо элементарной касательной силы $\tau_\rho dF$.

Так как закон распределения касательных напряжений известен [уравнение (7.3)], из уравнения (7.4) получаем

$$M_{кр} = \frac{\tau_{\max}}{r}\int_F \rho^2 dF, \qquad (7.5)$$

где $I_p = \int_F \rho^2 dF$ — полярный момент инерции сечения.

С учетом уравнения (7.3) можно определить **касательное напряжение в произвольной точке** поперечного сечения вала, определяемой радиусом ρ:

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{I_p}\rho, \qquad (7.6)$$

а также **максимальное касательное напряжение,** действующее на контуре вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_p}r = \frac{M_{кр}}{W_p}, \qquad (7.7)$$

где W_p — полярный момент сопротивления.

Эпюра распределения касательных напряжений по радиусу показана на рис. 7.4 для сплошного и полого валов.

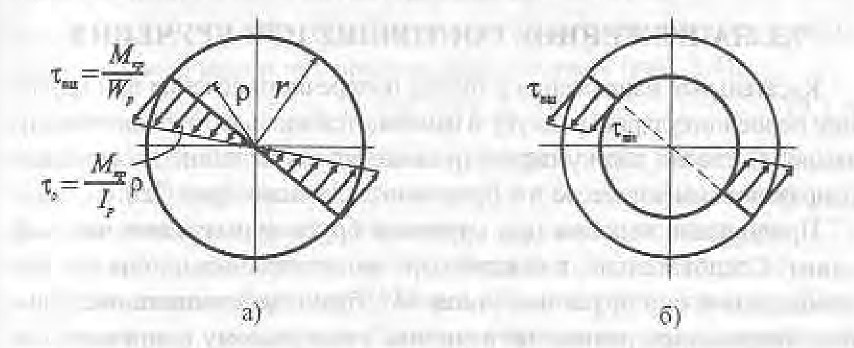


Рис. 7.4. *Эпюра распределения касательных напряжений по радиусу для сплошного (а) и полого (б) валов*

Угол закручивания вала нетрудно определить из полученного выше уравнения:

$$\gamma_\rho dx = d\varphi\,\rho,$$

а с учетом выражения (7.6) получим:

$$d\varphi = \frac{\tau_\rho}{G}\frac{dx}{\rho} = \frac{M_{кр}dx}{GI_p}. \qquad (7.8)$$

Угол закручивания всего бруса

$$\varphi = \int_l \frac{M_{кр}dx}{GI_p}. \qquad (7.9)$$

Если брус имеет несколько участков с различными аналитическими выражениями для $M_{кр}$ или различными выражениями I_p, то

$$\varphi = \sum_{1}^{n} \int \frac{M_{кр} dx}{GI_p}. \qquad (7.10)$$

В частном случае при $M_{кр}(x) = \text{const}$ или $I_p = \text{const}$, т.е. только для бруса постоянного сечения, нагруженного по концам сосредоточенными парами,

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p}. \qquad (7.11)$$

7.3. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ КРУЧЕНИИ

Касательные напряжения в точках поперечного сечения при кручении перпендикулярны радиусу и изменяются вдоль него по линейному закону. Согласно закону парности такие же по величине касательные напряжения имеют место и в продольных сечениях (рис. 7.5).

Продольные волокна при кручении бруса испытывают **чистый сдвиг**. Следовательно, в каждой паре ортогональных площадок, наклоненных к оси бруса под углом 45°, будут действовать нормальные напряжения, равные по величине касательному напряжению в поперечном сечении. При этом одно из них будет растягивающим, а другое — сжимающим (рис. 7.6).

В других наклонных площадках возникают одновременно касательные и нормальные напряжения. Наибольшие нормальные напряжения действуют на площадках, наклоненных под углом 45°, а наибольшие касательные напряжения — в поперечных сечениях.

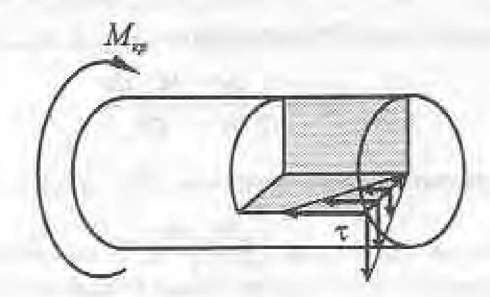


Рис. 7.5.

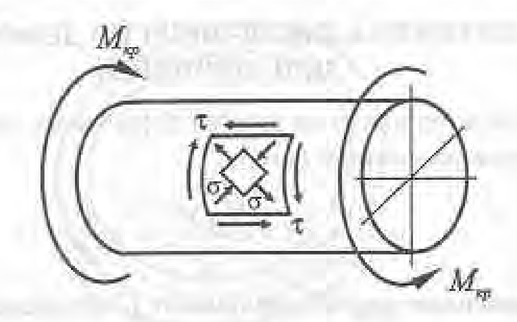


Рис. 7.6.

Напряженное состояние при чистом сдвиге можно исследовать по формулам (3.25) и (3.27), предположив, что в них $\sigma_{11} = \sigma_x = \sigma_{22} = \sigma_y = 0$, а $\sigma_{12} = \tau = M_{кр}\rho/I_p$. При чистом сдвиге главные напряжения равны по величине и противоположны по знаку (рис. 5.4):

$$s_1 = \tau,\ s_3 = -\tau,\ s_2 = 0. \qquad (7.12)$$

Площадки действия наибольших растягивающих напряжений располагаются на винтовой поверхности. Именно по этой поверхности и разрушаются при кручении образцы из хрупкого материала (рис. 7.7), так как они хуже сопротивляются отрыву частиц, чем их сдвигу.

Пластичные материалы, наоборот, обладают меньшим сопротивлением сдвигу, чем отрыву. Поэтому образцы из таких материалов разрушаются при кручении по плоскости поперечного сечения, где действуют наибольшие касательные напряжения (рис. 7.8).

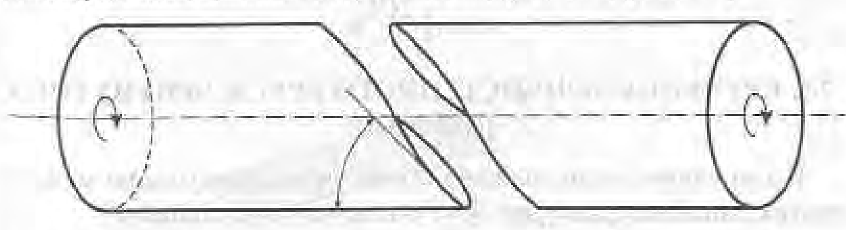


Рис. 7.7.

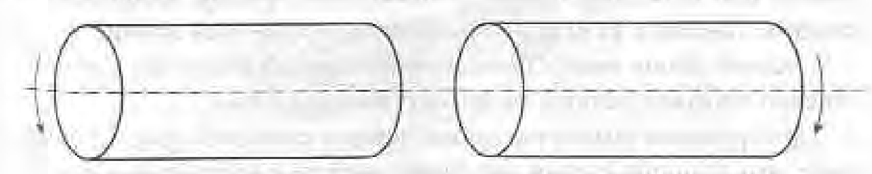


Рис. 7.8.

7.4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Удельная потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге определяется уравнением (3.44):

$$u = \frac{\tau^2}{2G};\ \tau = \frac{M_{кр}\rho}{I_p};\ u = \frac{dU}{dV}. \tag{7.13}$$

Потенциальная энергия деформации U определяется уравнением (7.13) интегрированием по объему:

$$U = \int_V u dV = \int_l \frac{M_{кр}^2(x)}{2GI_p^2(x)} dx \int_F \rho^2 dF = \int_l \frac{M_{кр}^2(x) I_p(x)}{2GI_p^2(x)} dx = $$

$$= \int_l \frac{M_{кр}^2(x)}{2GI_p(x)} dx. \tag{7.14}$$

При этом учитывается, что

$$I_p = \int_F \rho^2 dF.$$

В брусе постоянной жесткости GI_p при действии постоянного по длине крутящего момента

$$U = \frac{M_{кр}^2 l}{2GI_p}. \tag{7.15}$$

7.5. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО БРУСА ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

В том случае, если толщина стенки бруса значительно меньше других линейных размеров, брус считается тонкостенным.

Линия, делящая толщину сечения пополам, называется средней линией или контуром сечения. Тонкостенное сечение изображается средней линией, а размеры сечения задаются по этой линии.

Средняя линия может быть замкнутой и незамкнутой. Соответственно профили делятся на замкнутые и открытые.

При кручении замкнутых тонкостенных профилей (рис. 7.9) считают, что толщина стенки настолько мала, что касательные напряжения по толщине стенки одинаковы и равны напряжениям посре-

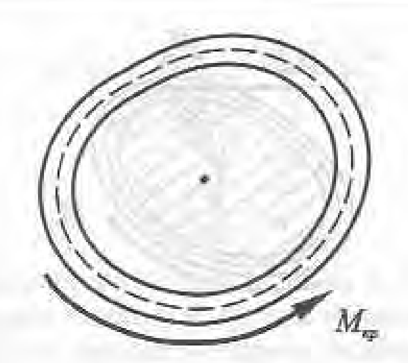


Рис. 7.9.

дине толщины стенки. Касательные напряжения направлены по касательной к срединной линии толщины стенки.

Составляя сумму проекций всех сил, приложенных к элементу, вырезанному из профиля (рис. 7.10), на ось профиля x, получим

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2,$$

т.е. произведение касательных напряжений на толщину стенки, или поток касательных напряжений вдоль контура сечения, постоянен:

$$\tau_1\delta_1 = \text{const}. \tag{7.16}$$

Исходя из этого, можно связать величину напряжения, возникающего в сечении, с величиной крутящего момента относительно произвольной точки O, вызывающего эти напряжения (рис. 7.11):

$$M_{кр} = \oint_s \tau\delta\rho ds. \tag{7.17}$$

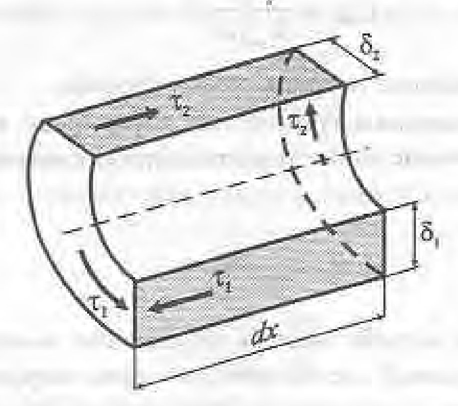


Рис.7.10.

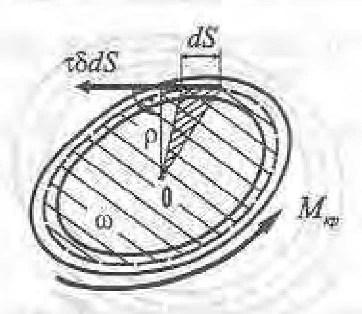


Рис. 7.11.

Интегрируя по контуру с учетом выражение (7.16), получим

$$M_{кр} = 2\tau\delta\omega; \qquad (7.18)$$

где $\rho ds = 2d\omega$ — удвоенная площадь элементарного сектора, заштрихованного на рис. 7.11; ω — площадь, охватываемая средней линией тонкостенного сечения.

На основании уравнения (7.18) получим следующую формулу для определения касательных напряжений при кручении тонкостенного замкнутого профиля:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\delta\omega}. \qquad (7.19)$$

Если толщина профиля по контуру будет переменной, то максимальное напряжение определяется формулой:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2\delta_{min}\omega}, \qquad (7.20)$$

где δ_{min} — минимальная толщина стенки профиля.

Рассмотрим потенциальную энергию деформации, накопленную в элементарном объеме тонкостенного стержня с размерами ds, dx, δ. Она равна

$$dU = \frac{\tau^2}{2G}\delta dx ds.$$

Для получения полной энергии деформации замкнутого однородного стержня длиной l необходимо последнее выражение проинтегрировать по длине стержня и по длине контура сечения s:

$$U = \frac{l}{2G}\oint_s \tau^2\delta ds = \frac{l\tau^2\delta^2}{2G}\oint_s \frac{ds}{\delta}. \qquad (7.21)$$

Интеграл

$$\oint_s \frac{ds}{\delta}$$

зависит от закона изменения толщины по дуге контура и является геометрической характеристикой сечения. На основании уравнения (7.19) выражение потенциальной энергии деформации может быть представлено так:

$$U = \frac{M_{кр}^2 l}{2G(2\omega)^2}\oint_s \frac{ds}{\delta}. \qquad (7.22)$$

С другой стороны, эта же энергия может быть выражена через работу внешнего скручивающего момента $M_{кр}$ на искомом угловом перемещении φ

$$U = A = \frac{M_{кр}\varphi}{2}.$$

Приравнивая правые части двух последних уравнений, и решая полученное равенство относительно φ, получим

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{4G(\omega)^2}\oint_s \frac{ds}{\delta}. \qquad (7.23)$$

Если толщина контура δ по дуге не меняется, то

$$\varphi = \frac{M_{кр} ls}{4G\omega^2\delta}, \qquad (7.24)$$

где s — длина замкнутого контура.

Площадь, ограниченная средней линией сечения трубы (рис. 7.12),

$$\omega = \pi R^2,$$

$$\oint_s \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta}.$$

По формулам (7.19) и (7.24) находим

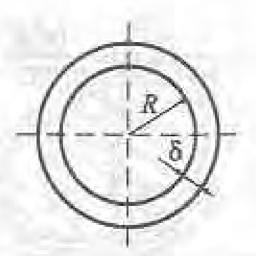


Рис. 7.12.

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 \delta} \qquad (7.25)$$

и

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{2\pi R^3 G \delta}. \qquad (7.26)$$

7.6. КРУЧЕНИЕ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

При кручении бруса некруглого сечения его поперечные сечения искривляются (депланируют). Это не позволяет принять гипотезу плоских сечений. Поэтому задачи кручения брусьев некруглых сечений решаются методами теории упругости.

При кручении бруса прямоугольного профиля максимальные касательные напряжения действуют в середине длинной стороны прямоугольника:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_k}. \qquad (7.27)$$

В середине короткой стороны прямоугольника

$$\tau'_{max} = \gamma \tau_{max}. \qquad (7.28)$$

В углах сечения касательные напряжения равны нулю. Эпюра касательных напряжений показана на рис. 7.13.

Угол закручивания определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G I_k}. \qquad (7.29)$$

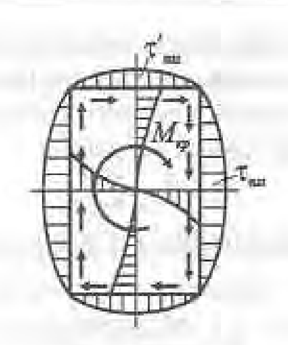


Рис. 7.13. *Эпюра касательных напряжений*

При этом $I_k = \beta h b^3$, $W_k = \alpha h b^2$, где b — длина короткой стороны; h — длина длинной стороны; α, β, γ — числовые коэффициенты, зависящие от соотношения сторон h и b, значения которых приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1.

h/b	1	1,5	1,75	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,82	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

7.7. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО БРУСА ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

При кручении бруса в виде узкой прямоугольной полосы, когда высота сечения h значительно больше толщины δ ($h/\delta >> 10$) коэффициенты α, β, согласно табл. 7.1, равны 1/3. Тогда τ и φ вычисляются по формулам

$$\tau = \frac{3M_{кр}}{h\delta^2}, \qquad (7.30)$$

$$\varphi = \frac{3M_{кр} l}{G h \delta^3}. \qquad (7.31)$$

Форма и соотношение размеров сечения скручиваемой полосы предопределяют и характер распределения напряжений за исключением небольших участков у коротких сторон прямоугольника. Рас-

пределение напряжений вдоль длинных сторон полосы равномерное, а по толщине сечения — линейное (рис. 7.14).

При кручении стержня сложного сечения, которое может быть разделено на n тонкостенных элементов

$$I_к = \sum I_{к_i}.$$

Так как угол закручивания для всего сечения и всех его частей одинаков и равен

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G I_к} = \frac{M_{кр_i} l}{G I_{к_i}},$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сечения пропорционально их жесткости:

$$M_{кр_i} = M_{кр} \frac{I_{к_i}}{I_к}.$$

В каждой части наибольшее касательное напряжение равно:

$$\tau_i = \frac{M_{кр_i}}{W_{к_i}} = \frac{M_{кр}}{I_к} \frac{I_{к_i}}{W_{к_i}}.$$

Наибольшее напряжение будет испытывать элемент, у которого отношение $I_{к_i}/W_{к_i}$ будет иметь максимальное значение

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{I_к} \left(\frac{I_{к_i}}{W_{к_i}} \right)_{max}. \quad (7.32)$$

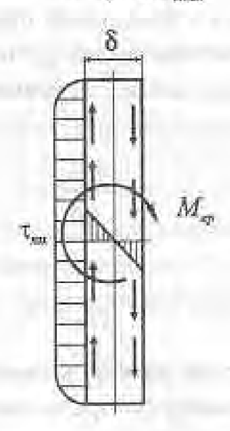


Рис. 7.14.

В том случае, когда сложное сечение состоит из узких и длинных элементов (уголковых, тавровых, двутавровых, корытных профилей), можно принять

$$I_к = \eta \cdot \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} h_i \delta_i^3,$$

где δ_i, h_i — короткие и длинные стороны прямоугольников соответственно, на которые можно разбить сечение. Коэффициент η для уголкового сечения 1, для двутаврового 1,2, для таврового 1,15, для швеллерного 1,12.

Угол закручивания определяется по формуле (7.29).

Наибольшее касательное напряжение у самого широкого из прямоугольников:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр} \delta_{max}}{I_к}, \quad (7.33)$$

где δ_{max} — наибольшая толщина элемента профиля.

Пример 7.1. Определить напряжения и погонный на 1 м длины угол закручивания стальной разрезной трубы (рис. 7.15), с диаметром средней линии d = 97,5 мм и толщиной δ = 2,5 мм, крутящий момент 40 Нм. Модуль сдвига материала трубы $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Сравнить полученные напряжения и угол закручивания с напряжением и углом закручивания для сплошной трубы.

Касательное напряжение в разрезной трубе рассчитывается по формуле (7.30):

$$\tau = \frac{3 M_{кр}}{h \delta^2} = \frac{3 \cdot 40}{(\pi\, 97{,}5) 2{,}5^2 \cdot 10^{-9}} = 62{,}7 \text{ МПа},$$

где $h = \pi d$ — развернутая длина осевой линии трубы.

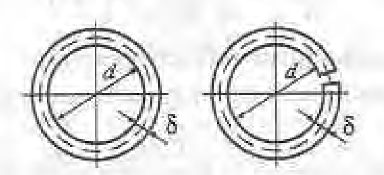


Рис. 7.15.

Касательное напряжение в сплошной трубе определяется по формуле (7.25):

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 \delta} = \frac{40}{2\pi (97{,}5/2)^2\, 2{,}5 \cdot 10^{-9}} = 1{,}072 \text{ МПа}.$$

Угол закручивания на один метр длины разрезной трубы по формуле (7.31) равен:

$$\varphi_0 = \frac{3M_{кр}}{Gh\delta^3} = \frac{3 \cdot 40}{8 \cdot 10^{10} (\pi\, 97{,}5) 2{,}5^3 \cdot 10^{-12}} = 0{,}3125 \text{ рад/м}.$$

Погонный угол закручивания для сплошной трубы определяется по формуле (7.26)

$$\varphi_0 = \frac{M_{кр}}{2\pi R^3 G\delta} = \frac{40}{2\pi \cdot (97{,}5/2)^3 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-12}} = 0{,}000275 \text{ рад/м}.$$

Таким образом, в сплошной трубе по сравнению с разрезанной вдоль образующей напряжения меньше в 58,3 раза, а угол закручивания – в 1136 раз.

7.8. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении **условие прочности** имеет вид:

$$\tau_{\max} \le [\tau], \qquad (7.34)$$

где $\tau_{\max}$ — максимальное касательное напряжение в брусе; $[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение.

Например, для вала полого круглого поперечного сечения, с внешним диаметром D и внутренним диаметром d

$$\frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{16M_{кр}}{\pi D^3 (1-\alpha^4)} \le [\tau], \qquad (7.35)$$

где $\alpha = d/D$ — коэффициент полости сечения.

Условие жесткости вала при кручении имеет вид:

$$\varphi_{0\max} = \frac{M_{кр}}{GI_p} = \frac{32M_{кр}}{\pi D^4 (1-\alpha^4)} \le [\varphi_0], \qquad (7.36)$$

где $[\varphi_0]$ — допускаемый относительный угол закручивания.

Пример 7.2. Подобрать диаметр сплошного вала, передающего мощность $N = 450$ л.с. при числе оборотов $n = 300$ мин$^{-1}$. Угол закручивания не должен превышать 1° на 2 м длины вала, $[\tau] = 40$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Крутящий момент определяем из уравнения (7.1):

$$M_{кр} = 7160 \frac{N}{n} = 7160 \frac{450}{300} = 10740 \text{ Н·м}.$$

Диаметр вала из выражения (7.35) равен

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10740}{\pi 40 \cdot 10^6}} = 0{,}111 \text{ м}.$$

Диаметр вала из выражения (7.36) равен

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi [\varphi_0] G}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 10740}{\pi \frac{1}{2 \cdot 57{,}2} 8 \cdot 10^{10}}} = 0{,}112 \text{ м}.$$

Выбираем больший размер 0,112 м.

Пример 7.3. Имеются два равнопрочных вала из одного материала, одинаковой длины, передающих одинаковый крутящий момент; один из них сплошной, а другой полый с коэффициентом полости $\alpha = 0{,}8$. Во сколько раз сплошной вал тяжелее полого?

Равнопрочными валами из одинакового материала считаются такие валы, у которых при одинаковых крутящих моментах, возникают одинаковые максимальные касательные напряжения, т.е.

$$\frac{M_к}{W_p^{спл}} = \frac{M_к}{W_p^{пол}}.$$

Равнопрочность валов определяет равенство моментов сопротивления:

$$W_p^{спл} = W_p^{пол}.$$

Откуда получаем

$$\frac{\pi D_{спл}^3}{16} = \frac{\pi D_{пол}^3}{16} (1-\alpha^4); \quad \frac{D_{пол}}{D_{спл}} = \sqrt[3]{(1-\alpha^4)}$$

Отношение масс двух валов равно отношению площадей их поперечных сечений:

$$m^{сп} : m^{пол} = F^{сп} : F^{пол} = \frac{\pi D_{сп}^2}{4} : \frac{\pi D_{пол}^2}{4}\left(1-\alpha^2\right)$$

Подставляя в это уравнение отношение диаметров из условия равной прочности, получим

$$\frac{m^{сп}}{m^{пол}} = \frac{\left(1-\alpha^4\right)^{2/3}}{\left(1-\alpha^2\right)} = 1{,}955.$$

Следовательно, полый вал при одинаковой прочности валов, вдвое легче сплошного. Это объясняется тем, что в силу линейного закона распределения касательных напряжений по радиусу вала, внутренние слои нагружаются меньше.

Пример 7.4. Два равнопрочных вала из одного материала, одинаковой длины передают одинаковый крутящий момент; один круглого поперечного сечения, другой - квадратного. Во сколько раз квадратный вал тяжелее круглого?

Из условия равной прочности имеем:

$$W_p = W_к,$$

где $W_к = \alpha h b^2$; коэффициент $\alpha = 0{,}208$ (определяется по табл. 7.1) для квадратного сечения $b = h$.

Из условия равнопрочности

$$\pi D^3/16 = \alpha b^3;\ \frac{b}{D} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{16\alpha}}.$$

Отношение масс двух валов равно отношению площадей их поперечных сечений:

$$m^{кв} : m^{кр} = F^{кв} : F^{кр} = b^2 : \frac{\pi D^2}{4}.$$

Подставляя в это уравнение отношение b/D, получим

$$\frac{m^{кв}}{m^{кр}} = \left(\frac{\pi}{16\alpha}\right)^{2/3} \cdot \frac{4}{\pi} = 1{,}22.$$

7.9. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН МАЛОГО ШАГА

Цилиндрические пружины характеризуются средним диаметром витка D, диаметром d проволоки, из которого выполнена пружина, числом витков n, углом наклона витков α и шагом пружины h (рис. 7.16 а). В пружинах с углом наклона витков $\alpha < 5°$ пренебрегают подъемом витков и считают длину витка примерно равной πD, а сам виток — расположенным в плоскости, нормальной к оси пружины. В этом случае сечение проволоки плоскостью, вдоль оси пружины, можно считать поперечным сечением.

Разделим пружину осевым сечением на две части и отбросим одну из них. Из условия равновесия оставшейся части (рис. 7.16, б) следует, что внутренние касательные силы упругости в сечении пружины приводятся к перерезывающей силе $Q = P$ и крутящему моменту $M_к = PD/2$.

Касательные напряжения, вызванные кручением, достигают максимума в контурных точках сечения, а напряжения от перерезывающей силы можно в первом приближении считать равномерно распределенными по плоскости сечения. В точке A контура сечения витка суммарные касательные напряжения достигают наибольшей величины (рис. 7.17)

$$\tau_{max} = \tau_M + \tau_Q = \frac{M_к}{W_к} + \frac{Q}{F} = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2},$$

или

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D}\right). \qquad (7.37)$$

Пренебрегая напряжениями от среза из-за малости отношения $d/2D$, получим

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3}. \qquad (7.38)$$

Осадка пружины λ (рис. 7.18) определяется приравниванием работы статически приложенной силы P, потенциальной энергии деформации пружины. Работа внешних сил равна $A = P\lambda/2$. Потенциальная энергия накапливается, главным образом, из-за кручения

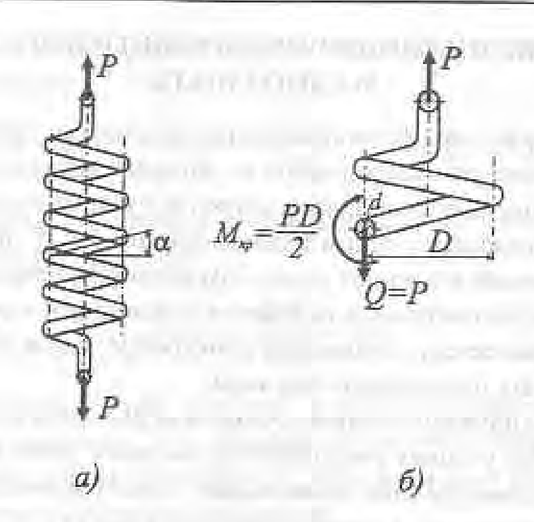


Рис. 7.16.

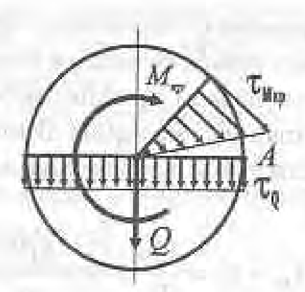


Рис. 7.17.

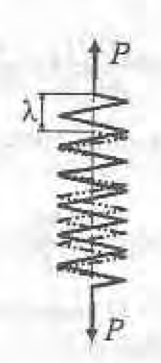


Рис. 7.18.

проволоки и может быть вычислена по формуле (7.15). Так как крутящий момент $M_к = PD/2$ и момент инерции $I_p = \pi d^4/32$ по длине проволоки не изменяются, а длина проволоки $l = \pi Dn$, потенциальная энергия деформации пружины равна

$$U = \frac{M_к^2 l}{2GI_p} = \frac{4PD^3 n}{Gd^4}.$$

Приравнивая A и U, получаем

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}. \qquad (7.39)$$

7.10. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ КРУЧЕНИИ

При решении статически неопределимых задач к уравнениям равновесия добавляют уравнения совместности деформаций.

Рассмотрим брус, жестко заделанный обоими концами (рис. 7.19). Отбросим заделки, заменив их действие неизвестными моментами M_1 и M_2. Уравнение совместности деформаций получим, приравняв к нулю угол закручивания в правой заделке:

$$\frac{M_2 a}{GI_{p2}} + \frac{M_1 b}{GI_{p1}} = 0,$$

где

$$I_{p1} = \pi d_1^4/32, \; I_{p2} = \pi d_2^4/32.$$

Крутящие моменты в сечениях бруса связаны уравнением:

$$M_2 - M_0 = M_1.$$

Решая совместно данные уравнения относительно неизвестных моментов, получим:

$$\frac{(M_1 + M_0)a}{GI_{p2}} + \frac{M_1 b}{GI_{p1}} = 0; \; M_1 = -\frac{M_0 a}{GI_{p2}\left(\frac{b}{GI_{p1}} + \frac{a}{GI_{p2}}\right)}; \; M_2 = M_0 + M_1.$$

Угол закручивания сечения C равен

$$\varphi_C = \frac{M_2 a}{GI_{p2}}$$

Эпюры крутящих моментов и углов закручивания представлены на рис. 7.19.

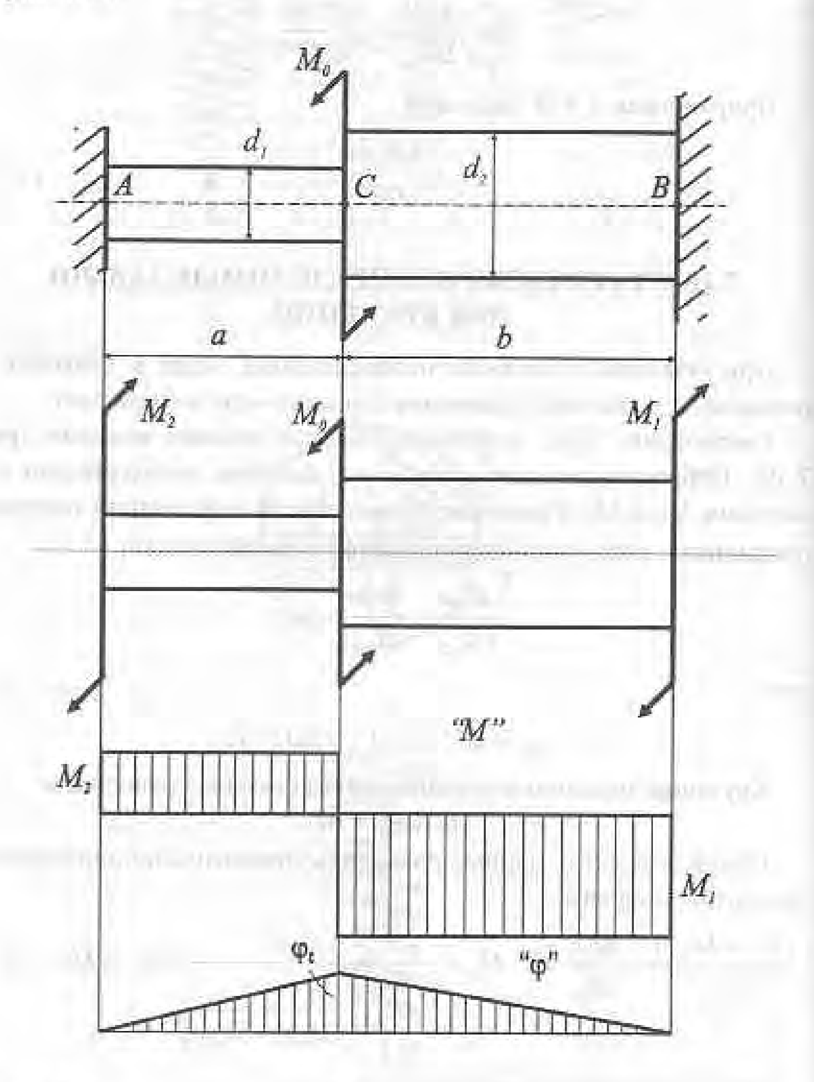


Рис. 7.19.

7.11. ПОНЯТИЕ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ И ПЛЕНОЧНОЙ (МЕМБРАННОЙ) АНАЛОГИЯХ

В поперечных сечениях скручиваемых стержней можно изобразить серию замкнутых непересекающихся линий, вдоль которых действуют касательные напряжения различной величины. Эти линии называются траекториями касательных напряжений при кручении или **силовыми линиями** (рис. 7.20). Взаимное расположение силовых линий таково, что большей плотности силовых линий соответствуют большие касательные напряжения.

Аналогично силовым линиям при кручении, при вращении жидкости в цилиндрической трубе можно изобразить траекторию скоростей движения жидкости — линии тока.

Линии тока и силовые линии имеют общие свойства. В частности — большей плотности линий тока соответствуют большие скорости движения жидкости. Если отверстие трубы и скручиваемый

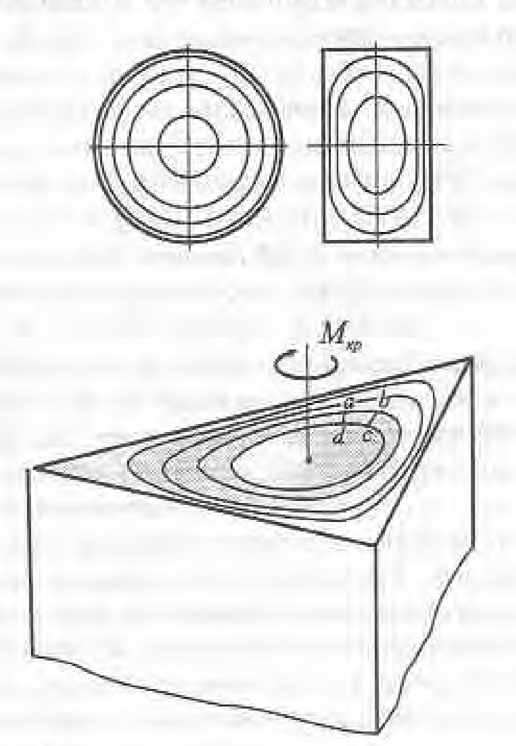


Рис. 7.20.

стержень будут иметь одинаковый профиль, то линии тока совпадут с силовыми линиями. Благодаря данной **гидродинамической аналогии,** можно судить о распределении касательных напряжений в стержнях при кручении по распределению скоростей движения жидкости в трубе того же профиля.

Если тонкую пластинку с отверстием, совпадающим с профилем скручиваемого стержня, покрыть тонкой пленкой (мембраной), то под действием равномерно распределенной нагрузки пленка в отверстии провиснет, образуя поверхность, горизонтали которой располагаются аналогично силовым линиям при кручении. Эта **мембранная аналогия** даст возможность составить картину распределения касательных напряжений по расположению горизонталей поверхности мембраны.

Глава 8. ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

8.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При растяжении, сжатии, кручении прямых брусьев оси, прямые до деформации, остаются прямыми и после деформации. **Изгиб** же представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса или **изменение кривизны оси** кривого бруса. Напомним, что **осью бруса** называется геометрическое место точек центров тяжестей поперечных сечений бруса, т.е. сечений, нормальных к оси бруса. Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса **изгибающих моментов**. Если из шести внутренних силовых факторов в сечении бруса отличным от нуля является только один изгибающий момент, изгиб называется **чистым** ($M_z \neq 0$, $Q_y = 0$, $Q_z = 0$, $N = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$).

Если в поперечных сечениях бруса кроме изгибающего момента действует также поперечная сила, изгиб называется **поперечным** ($M_z \neq 0$, $Q_y \neq 0$, $Q_z = 0$, $N = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$).

Брус, работающий на изгиб, называется **балкой**. Изгиб называется **плоским**, если ось балки после деформации остается плоской линией. Плоскость расположения изогнутой оси балки называется **плоскостью изгиба**. Плоскость действия нагрузочных сил называется **силовой плоскостью**.

Если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения, изгиб называется **прямым**. Когда это условие не выполняется, имеет место **косой изгиб**.

Главная плоскость инерции поперечного сечения — плоскость, образованная одной из главных осей поперечного сечения с продольной осью бруса. При плоском прямом изгибе плоскость изгиба и силовая плоскость совпадают.

В настоящем разделе рассматривается плоский прямой изгиб призматических балок, имеющих, по крайней мере, одну плоскость (ось) симметрии, совпадающую с силовой плоскостью (рис. 8.1).

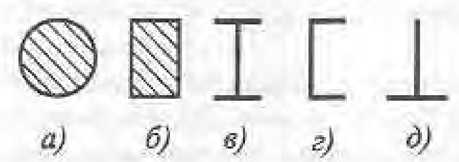


Рис. 8.1.

Типы опорных устройств балок и виды внешних нагрузок рассматривались в разделе 1.2.

8.2. ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ЖУРАВСКОГО

Расчет прочности балок производится применительно к наиболее нагруженному, то есть опасному сечению. Определяются опасные сечения с помощью эпюр, графиков, изображающих закон изменения Q и M по всей длине балки.

Для построения эпюр необходимо:

1. определить опорные реакции;
2. найти аналитические выражения Q и M на каждом участке балки и определить их величины в характерных точках (начало и конец участка, экстремальные точки);
3. параллельно оси балки провести оси и в характерных точках восстановить перпендикуляры, равные найденным значениям Q и M. Соединить концы этих перпендикуляров в соответствии с законом изменения Q и M на каждом участке.

Правила знаков для Q и M в поперечных сечениях балки показаны на рис. 8.2. Положительные значения изгибающих моментов оказываются с той стороны от оси, в которую обращается вогнутая сторона балки, т.е. эпюра изгибающих моментов строится на сжатых волокнах.

Пусть на балку действует произвольная статически уравновешенная система сил (рис. 8.3). Двумя поперечными сечениями выделим элементарную часть балки dx, заменив действие отброшенных частей внутренними силами. Кроме этих внутренних сил на

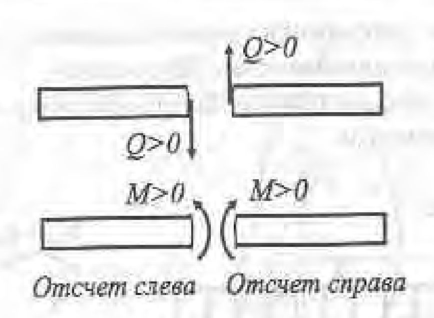


Рис. 8.2. *Правило знаков для Q и M*

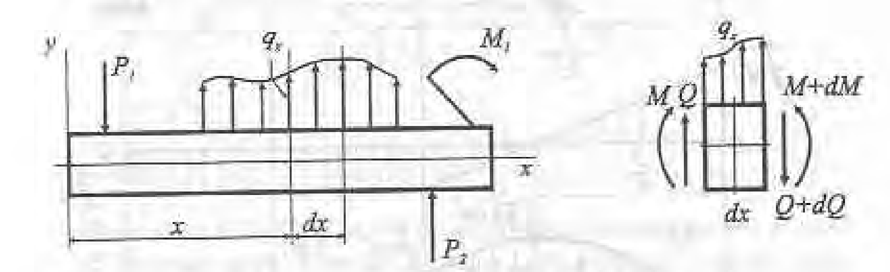


Рис. 8.3.

выделенный элемент действует часть распределенной нагрузки интенсивности q_x, которую можно принять постоянной на длине dx элементарной части балки. Условие равновесия элемента:

$$\sum Y = 0;\ Q - (Q + dQ) + q_x dx = 0;$$

$$\sum M_c = 0;\ \ M - (M + dM) + Qdx + \frac{q_x (dx)^2}{2} = 0.$$

Пренебрегая бесконечно малыми слагаемыми второго порядка, получим:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \tag{8.1}$$

$$q_x = \frac{dQ}{dx}, \tag{8.2}$$

$$q_x = \frac{d^2 M}{dx^2}. \tag{8.3}$$

Полученные дифференциальные зависимости называются дифференциальными зависимостями Журавского.

На рис. 8.4. показан пример построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

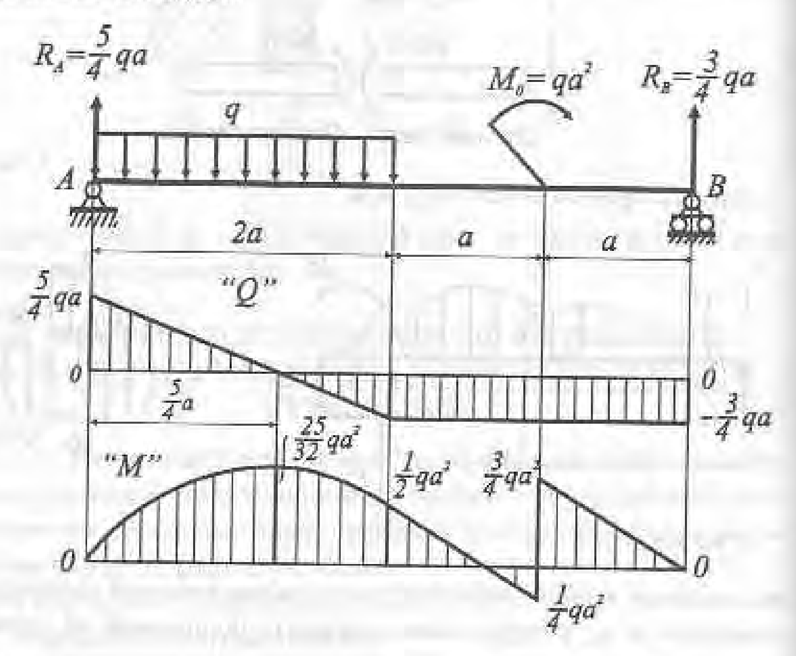


Рис. 8.4.

8.3. ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ

При плоском прямом изгибе действие внешних сил вызывает в поперечном сечении возникновение изгибающего момента и одной поперечной силы. Это возможно в том случае, если в поперечном сечении действуют нормальные σdF и касательные τdF усилия, т.е. имеет место сложное сопротивление – изгиб со сдвигом (рис. 8.5).

При этом силы σdF не могут уравновесить поперечную силу Q_y, а силы τdF не могут уравновесить M_z, поэтому

$$\sigma = f(M_z), \tag{8.4}$$

$$\tau = \varphi(Q_y). \tag{8.5}$$

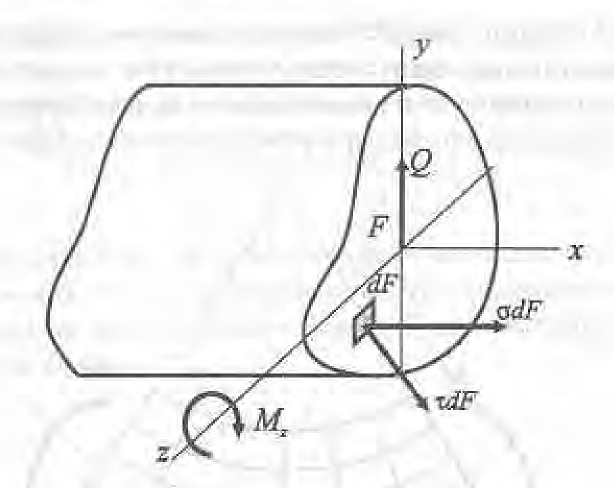


Рис. 8.5.

Нормальные напряжения имеют направление нормальное к сечению. В направлении касательных напряжений такой стабильности нет. На периферийных участках касательные напряжения параллельны контуру сечения. Следовательно, направление касательных напряжений от точки к точке меняется в зависимости от формы контура и положения точки. Вероятно, что и в других точках сечения касательные напряжения имеют различное направление. В общем случае плоского прямого изгиба касательные силы τdF образуют острые углы с осью симметрии y и имеют в каждой точке сечения по две составляющие: параллельные и нормальные к оси симметрии.

8.4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ЧИСТОМ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Как отмечалось выше, нормальные напряжения зависят только от изгибающих моментов, поэтому для вычисления σ возьмем чистый изгиб, при котором во всех сечениях $Q = 0$ и, в силу (8.1), M_z = const.

При чистом прямом изгибе происходит следующее.

На выпуклой стороне волокна растягиваются, а на вогнутой – сжимаются. В этом можно убедиться, если с той и другой стороны балки сделать надрезы, которые на выпуклой стороне разойдутся, а на вогнутой – сойдутся.

Если на боковой стороне балки нанести прямоугольную сетку, то будет видно, что переход от сжатых волокон к растянутым и наоборот происходит непрерывно и что между ними есть **нейтральный слой**, т.е. волокна, длина которых при изгибе не изменяется (рис. 8.6).

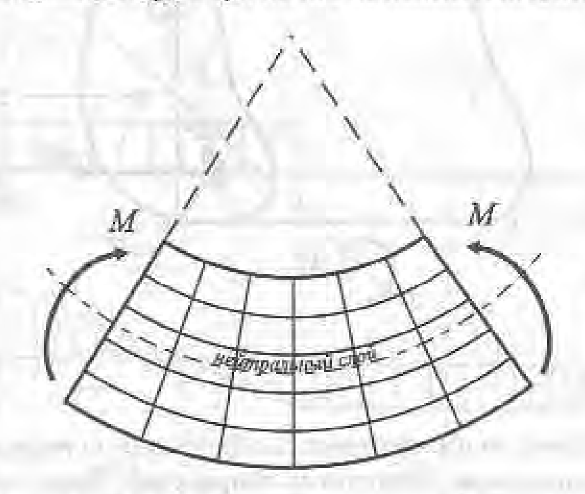


Рис. 8.6.

При плоском изгибе нейтральный слой образует цилиндрическую поверхность, образующие которой лежат в поперечных сечениях и называются **нейтральными линиями**. Нейтральные линии, так же как и нейтральный слой служат границами между растягивающими и сжимающими напряжениями. На самой нейтральной линии напряжений нет.

Проекция нейтрального слоя на плоскость изгиба (плоскость симметрии) в случае упругих деформаций называется **упругой линией балки**, которая, будучи частью нейтрального слоя, длину не меняет.

В силу эффекта Пуассона в растянутой зоне поперечные сечения сужаются, а в сжатой – расширяются.

Плоские поперечные сечения, нормальные к упругой линии балки до изгиба, остаются плоскими и нормальными к ней после изгиба (**гипотеза плоских сечений Я. Бернулли**).

Продольные волокна не оказывают давления друг на друга, а испытывают только осевое растяжение или сжатие, т.е. $\sigma_y = 0$.

Картина деформаций по ширине сечения не изменяется, т.е. нормальные напряжения распределены по ширине сечения равномерно.

Рассмотрим балку длиной l до (рис. 8.7 а) и после (рис. 8.7 б) чистого прямого изгиба. Относительное удлинение волокна слоя AB, удаленного на расстояния y от нейтрального слоя будет

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(\rho + y)\alpha - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{y}{\rho} \qquad (8.6)$$

Это равенство является аналитическим выражением гипотезы плоских сечений. Так как предполагается, что продольные волокна не давят друг на друга и, согласно закону Гука нормальные напряжения в слое AB равны

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E. \qquad (8.7)$$

Отношение E/ρ в сечении есть величина постоянная, следовательно, напряжения, так же как и деформации волокон, изменяются по линейному закону.

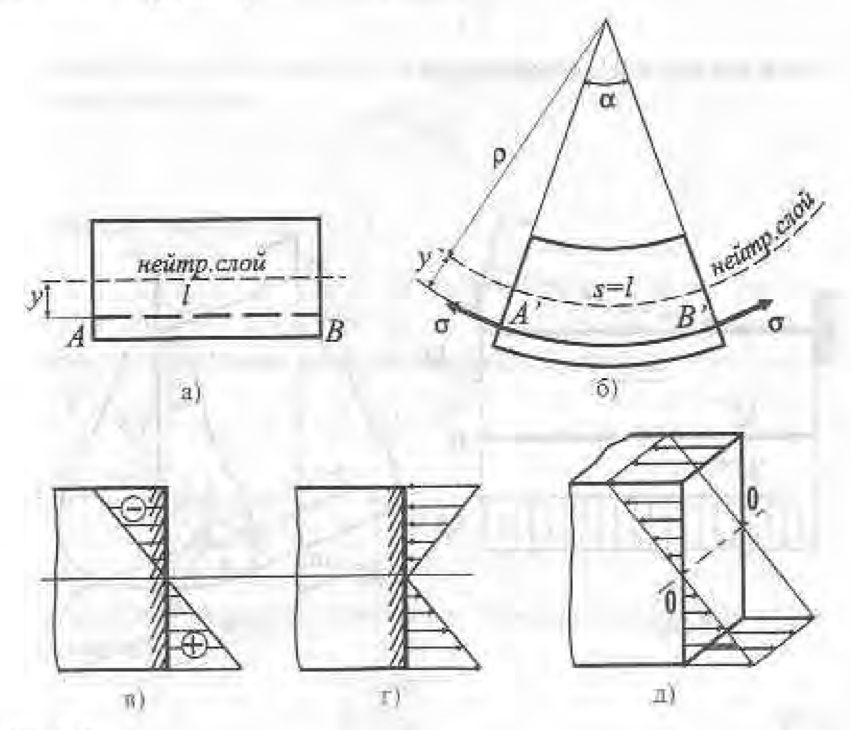


Рис. 8.7.

Для определения нормальных напряжений необходимо знать положение нейтрального слоя, т.е. ρ. Для этого рассмотрим условия равновесия между нагрузочным моментом, действующим на какое-нибудь симметричное сечение F и внутренними силами σdF, распределенными по этому сечению (рис. 8.8):

$$1)\ \Sigma X = 0,\quad 4)\ \Sigma m_x = 0,$$
$$2)\ \Sigma Y = 0,\quad 5)\ \Sigma m_y = 0,$$
$$3)\ \Sigma Z = 0,\quad 6)\ \Sigma m_z = 0.$$

Первое условие имеет вид

$$\int_F \sigma dF = 0$$

или согласно выражению (8.7)

$$\frac{E}{\rho}\int_F ydF = 0.$$

Так как $E/\rho \neq 0$, следовательно

$$S_z = \int_F ydF = 0.$$

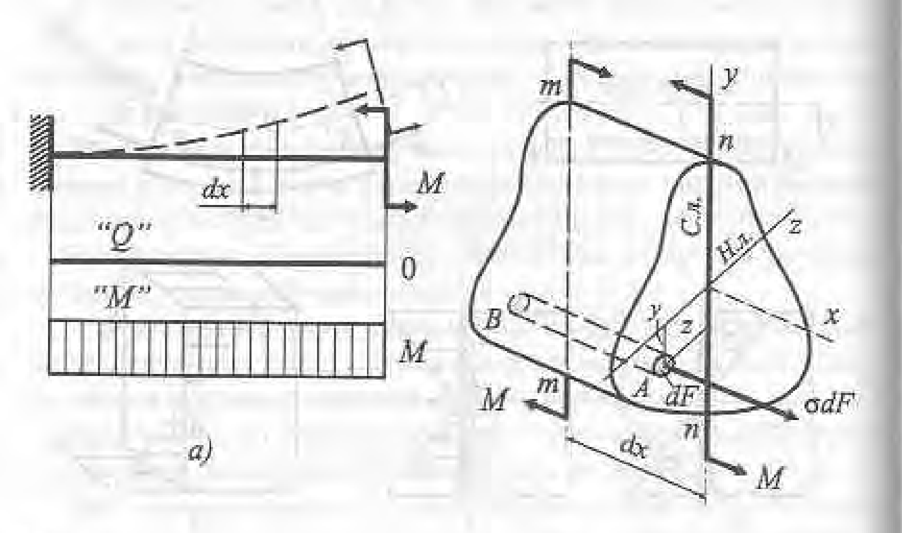


Рис. 8.8.

Данный интеграл есть статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной линии z. Он равен нулю, следовательно, **нейтральные линии (НЛ) проходят через центры тяжести своих поперечных сечений, т.е. являются центральными осями**, а упругая линия является геометрической осью балки.

Второе, третье и четвертое условия равновесия удовлетворяются тождественно. Для шестого условия:

$$\int_F y\sigma F = 0$$

или согласно выражению (8.7)

$$\frac{E}{\rho}\int_F yzdF = 0.$$

Здесь центробежный момент инерции площади сечения равен нулю:

$$I_{yz} = \int_F yz\,dF = 0,$$

следовательно, оси y, z являются главными осями инерции сечения.

Из пятого условия:

$$\int_F y\sigma\, dF = M_z$$

или согласно выражению (8.7)

$$\frac{E}{\rho}\int_F y^2 dF = M_z.$$

Тогда осевой момент инерции площади сечения

$$I_z = \int_F y^2 dF,$$

следовательно

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z}.$$

Таким образом, радиус кривизны нейтрального слоя определяется уравнением:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \qquad (8.8)$$

Подставляя это в выражение (8.7), получим расчетную формулу для нормальных напряжений при чистом прямом изгибе призматических балок

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (8.9)$$

Максимальные нормальные напряжения равны

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_z} y_{max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (8.10)$$

При чистом изгибе по одну сторону от нейтрального слоя происходит простое растяжение, по другую – простое сжатие. Следовательно, при чистом изгибе возникает линейное напряженное состояние:

в растянутой зоне $s_1 > 0$, $s_2 = s_3 = 0$,

в сжатой зоне $s_3 < 0$, $s_1 = s_2 = 0$.

Эпюры нормальных напряжений при изгибе (см. рис 8.7 в, г, д) показывают, что внутренние слои материала нагружаются меньше, чем наружные. Поэтому, проектируя профили балок, большую часть площади сечения размещают подальше от нейтральной линии. При изгибе в вертикальной плоскости стандартные двутавровые, швеллерные и тавровые профили балок (см. рис. 8.1 в, г, д) дают существенную экономию по массе.

Если материал балки хуже сопротивляется растяжению, нежели сжатию, то центр тяжести сечения должен располагаться ближе к растянутым волокнам, чтобы величина максимальных растягивающих напряжений была меньше максимальных сжимающих напряжений (рис. 8.9).

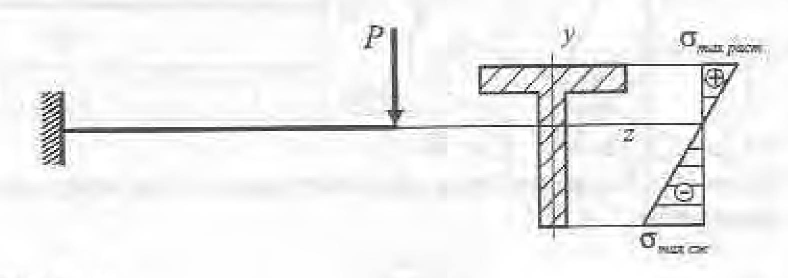


Рис. 8.9.

8.5. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОМ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Касательные напряжения при плоском прямом изгибе зависят только от поперечных сил. Однако, при определении касательных напряжений необходимо учитывать изгибающие моменты, так как если $Q \neq 0$, то в силу (8.1) и $M \neq 0$, т.е.

$$Q = Q(x),\ M = M(x).$$

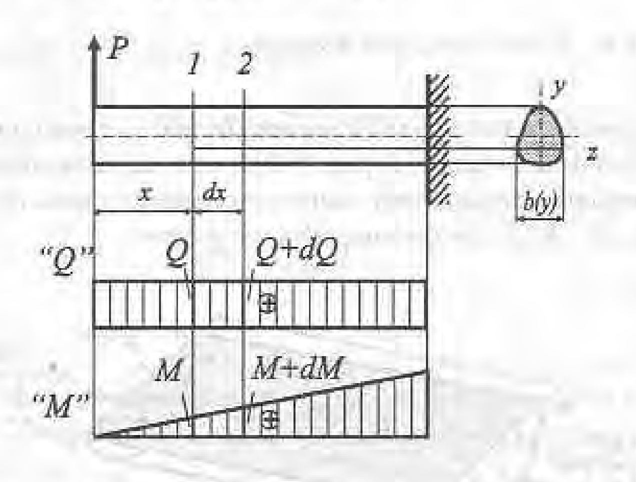


Рис. 8.10. *К выводу формулы Журавского*

При этом изменение моментов быстрее изменения поперечных сил. Поэтому, учитывая приращения моментов, пренебрегаем изменением поперечных сил при переходе от одного к другому бесконечно близкому сечению.

По закону парности касательные напряжения возникают не только в поперечных сечениях, но и в продольных сечениях, параллельных нейтральному слою. Поэтому вместо нахождения касательных напряжений, параллельных Q и действующих на уровне y в поперечном сечении, можно определить равные им касательные напряжения, действующие на этом же уровне в продольном сечении (рис. 8.11 и 8.12).

Чтобы определить касательные напряжения, действующие в сечении x на уровне y от нейтральной линии, в области этого сечения

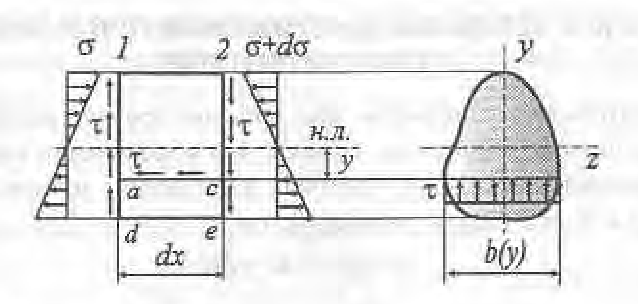


Рис. 8.11. *К выводу формулы Журавского*

выделим бесконечно малый элемент балки. Для этого проведем два поперечных сечения 1, 2 (рис. 8.10) и одно продольное сечение, параллельное нейтральному слою и отстоящее от него на расстояние y. На рис. (8.12) это сечения *adm*, *cen* и *amnc*.

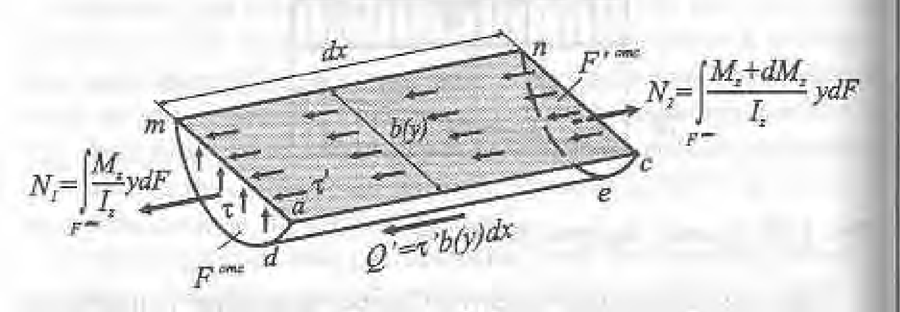


Рис. 8.12. *К выводу формулы Журавского*

По сечению *adm* элемента действуют искомые касательные напряжения τ, параллельные Q и нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z}y. \qquad (8.11)$$

По сечению *cen* элемента действуют такие же по величине касательные напряжения τ, так как $dQ = 0$, и нормальные напряжения

$$\sigma + d\sigma = \frac{M_z + dM_z}{I_z}y. \qquad (8.12)$$

В сечении *amnc* действуют касательные напряжения $\tau' = |\tau|$, направленные в сторону меньшего нормального напряжения, а нормальные напряжения или отсутствуют или пренебрежимо малы.

Составим условие равновесия выделенного элемента как сумму проекций всех сил на ось x, предполагая, что касательные напряжения τ, а потому и τ', по ширине сечения $b(y)$ не меняются:

$$\sum X = -\int_{F_{отс}} \sigma\, dF - \tau' b(y)\,dx + \int_{F'_{отс}} (\sigma + d\sigma)\,dF = 0.$$

Подставив (8.11) и (8.12), получим

$$\tau' b(y)\,dx = \frac{dM_z}{I_z} S_z^{отс}, \qquad (8.13)$$

где

$$S_z^{отс} = \int_{F_{отс}} y\,dF \qquad (8.14)$$

$S_z^{отс}$ — абсолютная величина статического момента той части поперечного сечения, которая лежит ниже или выше уровня y искомых напряжений.

Из формулы (8.13), принимая во внимание выражение (8.1), получим формулу касательных напряжений, возникающих в поперечных сечениях при плоском прямом изгибе параллельно Q на уровне y от нейтрального слоя:

$$\tau = \frac{Q S_z^{отс}}{I_z b(y)}. \qquad (8.15)$$

Следует помнить, что касательные напряжения, параллельные Q в общем случае являются только частью полных касательных напряжений (рис. 8.5).

Пример 8.1. Построить эпюру распределения касательных напряжений по высоте прямоугольного профиля балки при изгибе (рис. 8.13).

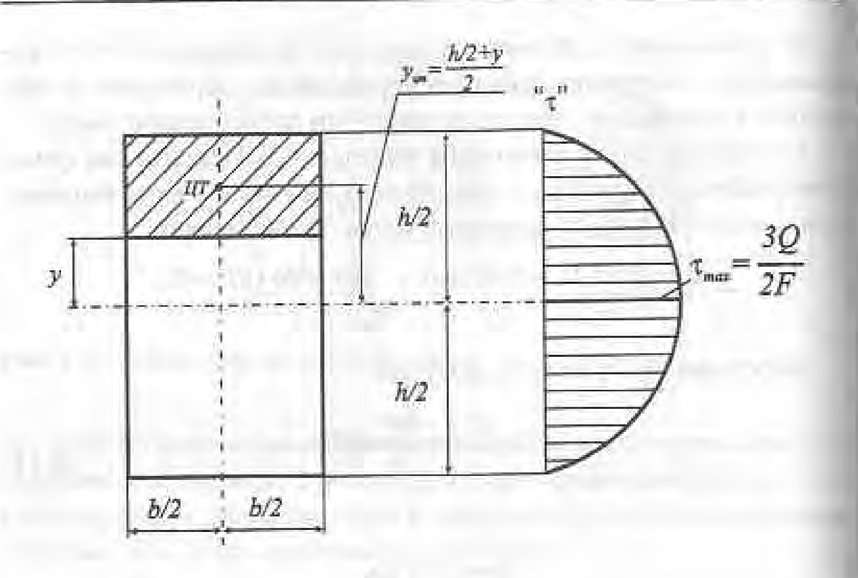


Рис. 8.13

Из построения видно, что

$$S_z^{отс} = F_{отс} y_{цт} = b(h/2 - y)\frac{h/2 + y}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right),$$

$$b(y) = b;\ I_z = bh^3/12.$$

Подставив это в уравнение (8.15), получим

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \qquad (8.16)$$

Следовательно, касательные напряжения меняются по параболическому закону (рис. 8.14, а). При этом

$$\tau_{max} = \tau_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = 1{,}5\frac{Q}{F}, \qquad (8.17)$$

$$\tau_{min} = \tau_{y=\pm h/2} = 0.$$

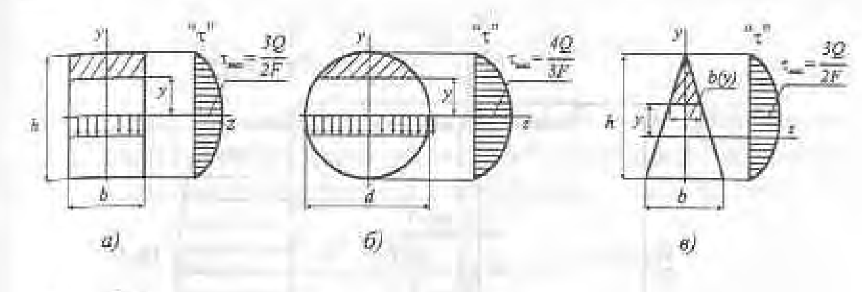


Рис. 8.14

В круглом сечении (рис. 8.14, б) эпюра касательных напряжений ограничена кривой, имеющей максимум на нейтральной оси. Учитывая, что статический момент полукруга и момент инерции круга равны

$$S_z^{отс} = \frac{\pi d^2}{8}\frac{2d}{3\pi} = \frac{d^3}{12};\ I_z = \frac{\pi d^4}{64},$$

получаем

$$\tau_{max} = \frac{16}{3}\frac{Q}{\pi d^2} = \frac{4}{3}\frac{Q}{F}. \qquad (8.18)$$

Следовательно, максимальные касательные напряжения в круглом сечении на 33 % больше средних напряжений $\tau = Q/F$, по которым, например, обычно проводится расчет заклепок.

Для треугольного сечения с основанием b и высотой h (рис. 8.14, в), имеем

$$S_z^{отс} = \frac{b(y)}{3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)\left(\frac{h}{3} + y\right);\ I_z = \frac{bh^3}{36},$$

$$\tau = \frac{12Q}{bh^3}\left(\frac{2h}{3} - y\right)\left(\frac{h}{3} + y\right);\quad \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F}.$$

Максимальное напряжение имеет место на расстоянии $y = h/6$ от нейтральной линии, то есть в точках средней линии треугольника.

Пример 8.2. Построить эпюру распределения касательных напряжений для балки двутаврового (№ 12 по сортаменту) сечения (рис. 8.15), если $Q = 10$ кН.

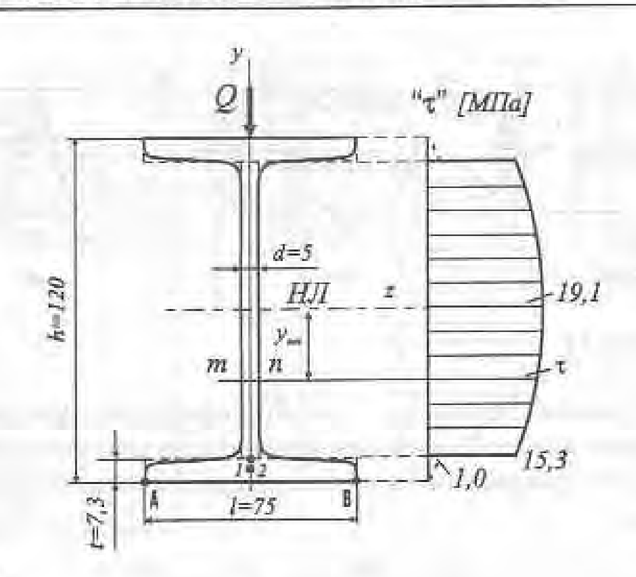


Рис. 8.15.

Для построения эпюры схематизируем действительное сечение, представив его в виде трех прямоугольников, как показано на рис. 8.15 пунктиром. Проведем произвольную линию *mn*, параллельную нейтральной линии, и переместим ее вдоль оси *y*. Очевидно, что напряжения в точках этой линии меняются по параболическому закону, так как сечения являются прямоугольниками. Для построения эпюры касательных напряжений вычислим τ на линии *AB*, в месте сопряжения полки со стенкой (точки 1 и 2), причем будем считать, что они расположены бесконечно близко к границам полки, но лежат по разные стороны от нее, и в точках нейтральной линии.

Для точек линии *AB* ширина сечения равна *l*, а статический момент равен нулю, так как линия *AB* не отсекает никакой площади. Таким образом, в точках линии *AB* касательные напряжения равны нулю.

Для точки 1 статический момент равен

$$S_z^{отс} = lt\left(\frac{h}{2}-\frac{t}{2}\right) = 7{,}5\cdot 0{,}73(6-0{,}36) = 30{,}9\ \text{см}^3.$$

Момент инерции сечения относительно нейтральной оси находим по сортаменту $I_z = 403$ см^4. Касательное напряжение в точке 1 по формуле (8.15)

$$\tau_{(1)} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 30{,}9\cdot 10^{-6}}{7{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 403\cdot 10^{-8}} = 1{,}02\ \text{МПа}.$$

Для точки 2 статический момент (с точностью до бесконечно малых величин) остается таким же, но ширина сечения d = 0,5 см. Поэтому касательное напряжение в точке 2 будет

$$\tau_{(2)} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 30{,}9\cdot 10^{-6}}{0{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 403\cdot 10^{-8}} = 15{,}3\ \text{МПа}.$$

Следовательно, при переходе от точки 1 к точке 2 касательное напряжение возрастает в 15 раз и на эпюре наблюдается скачок.

Для точек нейтральной линии ширина сечения d = 0,5 см, а статический момент берется для половины сечения из сортамента $S_{z\,\max} = 38{,}5$ см^3. Поэтому

$$\tau_{\max} = \frac{10\cdot 10^3\cdot 38{,}5\cdot 10^{-6}}{0{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 403\cdot 10^{-8}} = 19{,}1\ \text{МПа}.$$

На основании этих данных строится эпюра касательных напряжений для нижней половины сечения. Для верхней половины сечения в силу симметрии профиля относительно оси *z* эпюра будет симметрична первой.

Построенная эпюра условна, так как она дает верные значения касательных напряжений только для точек стенки, достаточно удаленных от полок. Вблизи полок касательные напряжения в стенке возрастают, из-за того, что место сопряжения полки со стенкой является источником концентрации касательных напряжений. В полках же, где отношение высоты к ширине много меньше единицы, возникают касательные напряжения, перпендикулярные направлению *Q*, величина которых меняется по ширине сечения.

Необходимо отметить также, что формулой Журавского можно пользоваться только в случае прямого изгиба.

При изгибе **тонкостенных профилей** касательные напряжения определяются по следующей формуле

$$\tau = \frac{QS_z^{отс}}{I_z\delta}, \tag{8.19}$$

где σ — толщина тонкостенного профиля.

На рис. 8.16 построена эпюра касательных напряжений при изгибе тонкостенного двутавра в вертикальной плоскости симметрии. Вследствие симметрии сечения и нагрузки, касательные напряжения в симметричных точках полок двутавра должны быть также симметричны относительно оси y и согласно уравнению (8.19) будут увеличиваться от края к центру по линейному закону:

$$\tau = \frac{Q}{I_z\delta}\frac{h\delta}{2}z.$$

Вдоль стенки касательные напряжения изменяются по параболическому закону:

$$\tau(y) = \frac{Q}{I_z\delta}\left[bh\delta + \frac{\delta}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right]$$

и направлены в туже сторону, что и сила Q.

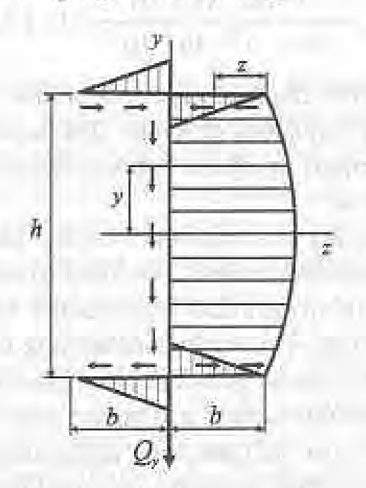


Рис. 8.16.

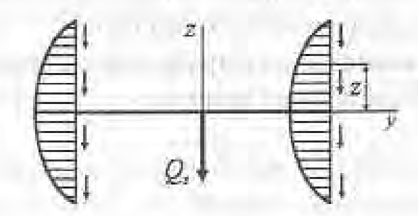


Рис. 8.17.

При изгибе двутавровой балки в плоскости второй оси (рис. 8.17) касательные напряжения в стенке равны нулю, а вдоль каждой из полок изменяются по параболическому закону:

$$\tau(z) = \frac{Q}{I_z\delta}\left(b - \frac{z}{2}\right)\delta z.$$

8.6. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

При поперечном изгибе наибольшие нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения, а на самой этой оси нормальные напряжения равны нулю, тогда как зона действия наибольших касательных напряжений расположена, наоборот, вблизи нейтральной оси. Кроме того, величина τ_{max} мала по сравнению с σ_{max}, если длина балки существенно больше высоты сечения. Все это позволяет не принимать во внимание касательные напряжения и проводить расчет на прочность только по нормальным напряжениям (для тонкостенных балок это не всегда справедливо).

Условие прочности балки требует, чтобы максимальные нормальные напряжения не превышали допускаемых напряжений для материала балки:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_z}y_{max} \le [\sigma], \qquad (8.20)$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$ или $[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}$.

Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие, то опасной будет та точка сечения, где действует наибольшее по абсолютной величине напряжение независимо от его знака. Для хрупких материалов, имеющих различные пределы прочности при растяжении σ_{Bp} и сжатии $\sigma_{Bсж}$, требуется проверка прочности по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\sigma_p = \frac{M_{max}}{I_z}y_p \le [\sigma]_p, \qquad \sigma_{сж} = \frac{M_{max}}{I_z}y_{сж} \le [\sigma]_{сж},$$

где $[\sigma]_p = \frac{\sigma_{Bp}}{n}$ или $[\sigma]_{сж} = \frac{\sigma_{Bсж}}{n}$.

Для балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, целесообразно выбирать сечения, симметричные относительно их нейтральных осей, при этом условии обеспечивается одинаковый запас прочности сечения по растянутым и сжатым волокнам.

Если кроме условия прочности принимать во внимание и требования **минимальной массы** балки, то наиболее **рациональным** будет сечение, которое при заданном моменте сопротивления W_z имеет наименьшую площадь сечения F, а при заданной площади – наибольший момент сопротивления. Поэтому двутавровое сечение имеет существенное преимущество перед прямоугольным сечением.

Хрупкие материалы обладают различной прочностью при растяжении и сжатии. Поэтому для хрупких материалов рациональным будет сечение, несимметричное относительно нейтральной оси, например тавровое, несимметричное двутавровое и т.п.

Пример 8.3. Для балки из пластичного материала, передающей в опасном сечении изгибающий момент $M_{max} = 32$ кН·м, подобрать двутавровое и прямоугольное сечение ($h/b = 2$), если $[\sigma] = 160$ МПа. Сравнить их массы.

Момент сопротивления определяется из условия прочности (8.20):

$$\frac{M_{max}}{\Omega\zeta} \le [\sigma]; \; \Omega\zeta \ge \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{32 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 200 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 200\ \text{см}^3.$$

Подбираем по сортаменту ближайший стандартный двутавровый профиль:

$$W_{z,№12} = 203\ \text{см}^3, \; F_{№12} = 28{,}9\ \text{см}^2.$$

Для прямоугольного сечения имеем

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3}; \; b \ge \sqrt[3]{\frac{3}{2}W_z} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 6{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{м} = 6{,}7\ \text{см};$$

$$F = 89{,}8\ \text{см}^2.$$

Отношение масс подобранных профилей равно отношению их площадей поперечных сечений и составляет 3:1, т.е. балка прямоугольного сечения более чем в три раза тяжелее балки двутаврового сечения при условии равной их прочности.

8.7. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Потенциальная энергия деформации при поперечном изгибе определяется путем интегрирования общего уравнения для удельной потенциальной энергии (3.44):

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} \cdot dV + \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \cdot dV.$$

С учетом уравнений (8.9) и (8.15), имеем:

$$U = \int_l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z^2} dx \int_F y^2 dF + \int_l \frac{Q^2(x)}{2GF} \cdot dx \int_F \frac{S_z^2 \cdot F}{I_z^2 \cdot b^2(y)} \cdot dF.$$

Интеграл по площади в первом слагаемом есть осевой момент инерции

$$I_z = \int_F y^2 dF,$$

во втором слагаемом деление на площадь F введено для удобства записи расчетной формулы. Окончательно имеем:

$$U = \int_l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx + K \int_l \frac{Q^2(x)}{2GF} \cdot dx, \qquad (8.21)$$

где K — безразмерный коэффициент:

$$K = \int_F \frac{S_z^2 F}{I_z^2 b^2(y)} dF.$$

Коэффициент K учитывает неравномерность распределения τ по сечению и зависит только от формы сечения. Например, для прямоугольника

$$K = \frac{bh}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2 b^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)\right]^2 b\, dy = \frac{6}{5}.$$

Расчеты показывают, что для обычных балок ($l >> h$) второе слагаемое уравнения (8.21) во много раз меньше первого. Поэтому энергией сдвига, как правило, пренебрегают и потенциальную энергию при изгибе балок вычисляют по формуле

$$U = \sum_{1}^{n} \int_{l} \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx, \tag{8.22}$$

где n — число участков балки.

8.8. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

В произвольном месте по длине балки, на уровне y от нейтрального слоя балки, выделим бесконечно малый элемент (рис. 8.18).

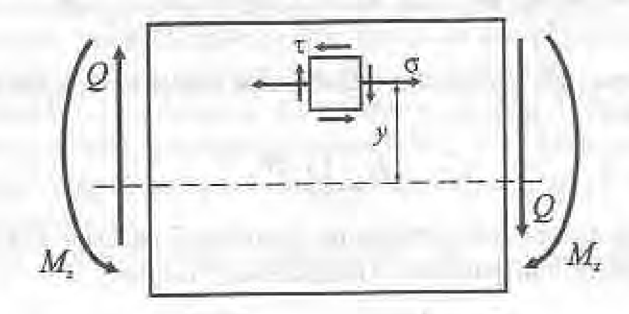


Рис. 8.18.

При плоском прямом изгибе по вертикальным граням будут действовать нормальные (8.9) и касательные (8.15) напряжения. По горизонтальным граням будут действовать только касательные напряжения, так как согласно исходному предположению, продольные волокна не оказывают давления друг на друга. Фасадные грани от напряжений свободны. Следовательно, здесь имеет место **плоское напряженное состояние**.

Главные напряжения и главные площадки в элементе (рис. 8.19) могут быть найдены с помощью круга Мора (см. раздел 3.7) или по уравнениям (3.25), (3.27), подставляя в них вместо $\sigma_{11} = \sigma_x$ значение $\sigma = \sigma_\alpha$ по формуле (8.9), $\sigma_{22} = \sigma_y = 0$, а вместо $\sigma_{12} = \tau_{xy}$ — значение $\tau = \tau_\alpha$ по формуле (8.15)

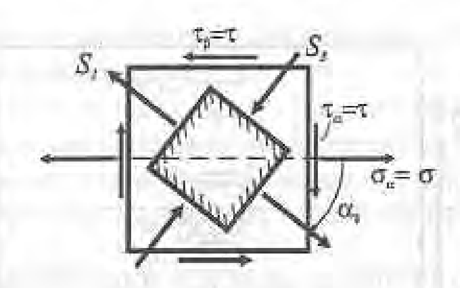


Рис. 8.19.

$$s_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \; s_2 = 0, \tag{8.23}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau}{\sigma}. \tag{8.24}$$

Круг Мора для элемента, изображенного на рис. 8.19, построен на рис. 8.20.

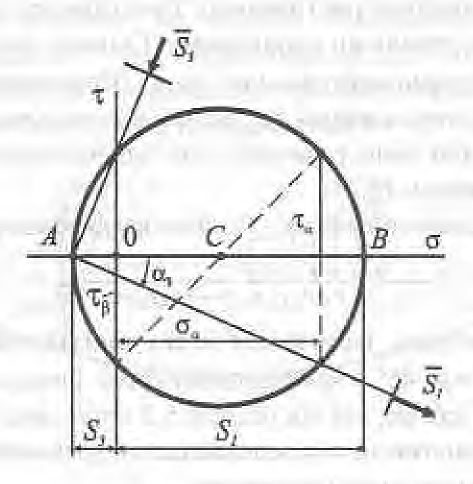


Рис. 8.20.

Перемещая элемент от крайнего верхнего до крайнего нижнего волокна балки, получаем различные виды напряженного состояния и различные по величине и направлению главные напряжения (рис. 8.21).

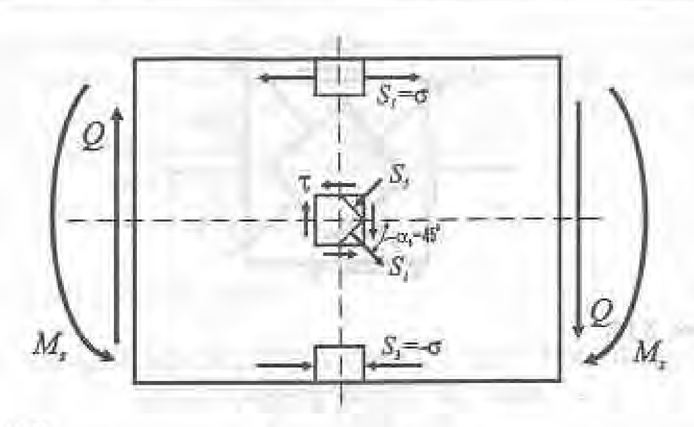


Рис. 8.21.

В крайнем верхнем положении

$$\tau = 0,\ s_1 = \sigma = \frac{M_z}{I_z} y > 0,\ s_2 = s_3 = 0. \qquad (8.25)$$

Следовательно, здесь имеет место **линейное напряженное состояние (линейное растяжение).** При этом вертикальные площадки являются главными площадками. Главное напряжение s_1 действует параллельно нейтральному слою. Напряжения по наклонным площадкам определяются так же как в случае растяжения (см. раздел 4.15) с той лишь разницей, что главные напряжения определяются уравнением (8.25).

У нейтрального слоя: $\sigma = 0$, тогда из уравнений (8.23), (8.24) получаем

$$s_1 = \tau,\ s_3 = -\tau,\ \alpha_0 = -45°.$$

Следовательно, здесь имеет место **чистый сдвиг**: s_1 и s_3 действуют под углом 45° к нейтральному слою. Главные напряжения определяются так же, как и в разделе 5.2 с той лишь разницей, что касательные напряжения определяются по уравнению (8.15).

В крайнем нижнем положении

$$\tau = 0,\ s_3 = \sigma = \frac{M_z}{I_z} y < 0,\ s_1 = s_2 = 0.$$

Следовательно, здесь имеет место **линейное напряженное состояние (линейное сжатие).** При этом вертикальные площадки являются главными площадками. Главное напряжение s_3 действует параллельно нейтральному слою.

В промежуточных точках сечения, расположенных ниже нейтральной оси имеет место плоское напряженное состояние. Аналогичное напряженное состояние изображено на рис. 8.18 с той разницей, что в данном случае напряжения σ являются сжимающими.

8.9. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ БАЛКИ

При изгибе ось балки искривляется, а поперечные сечения перемещаются поступательно и поворачиваются вокруг нейтральных осей, оставаясь при этом нормальными к изогнутой продольной оси (рис. 8.22). Деформированная ось балки называется **упругой линией**, а поступательные перемещения сечений, равные перемещениям $y = y(x)$ их центров тяжести сечений – **прогибами балки.**

Прогибы $y(x)$ и углы поворота сечений $\theta(x)$ связаны между собой. Из рис. 8.22 видно, что угол поворота сечения θ равен углу φ наклона касательной к упругой линии (θ и φ — углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Но согласно геометрическому смыслу первой производной $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi = y'$.

В пределах упругих деформаций прогибы балок малы, а углы поворота θ не превышают 0,1 рад. В этом случае $\theta = y'$.

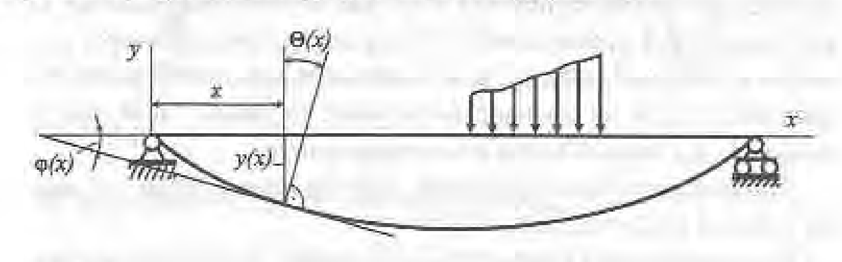


Рис. 8.22.

С достаточной точностью можно принять, что при поперечном изгибе кривизна упругой линии зависит только от величины изгибающего момента M_z и жесткости EI_z [уравнение (8.8)]:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \qquad (8.26)$$

В то же время кривизна плоской кривой равна

$$K = \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} \qquad (8.27)$$

Приравнивая правые части (8.26) и (8.27), получаем

$$\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} = \pm\frac{M_z}{EI_z}. \qquad (8.28)$$

Уравнение (8.28) называется **дифференциальным уравнением упругой линии балки**. При малых деформациях второе слагаемое в знаменателе выражения (8.28) мало по сравнению с единицей [при $\theta = 0{,}1$ рад $(y')^2 = 0{,}01$]. Поэтому этим слагаемым можно пренебречь. В результате получим **приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки**

$$y'' = \pm\frac{M_z}{EI_z}. \qquad (8.29)$$

Выбор знака в правой части уравнения (8.29) определяется направлением координатной оси y, так как от этого направления зависит знак второй производной y''. Если ось направлена вверх, то, как видно из рис. 8.23, знаки y'' и M_z совпадают, и в правой части ставят знак плюс. Если же ось направлена вниз, то знаки y'' и M_z противоположны, и в правой части ставят знак минус.

Дифференциальное уравнение упругой линии балки справедливо только в пределах закона Гука.

Интегрированием уравнения (8.29) находят угол поворота сечений:

$$y' = \theta = \int\frac{M_z(x)}{EI_z(x)}dx + C_1, \qquad (8.30)$$

и прогиб балки:

$$y = \int dx\int\frac{M_z(x)}{EI_z(x)}dx + C_1x + C_2 \qquad (8.31)$$

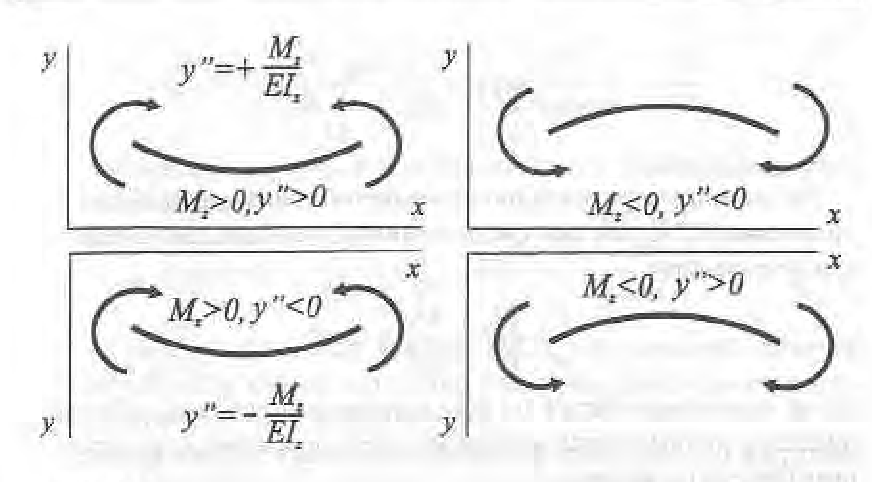


Рис. 8.23.

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий.

Пример 8.4. Для консольной балки с сосредоточенной парой M_0 на свободном конце найти аналитические выражения для прогибов и углов поворота (рис.8.24).

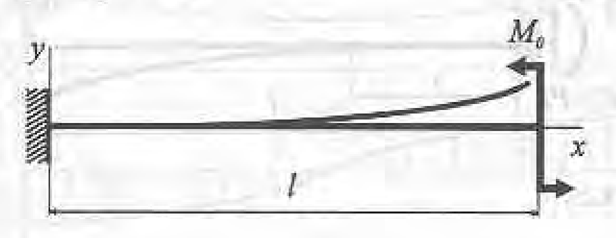


Рис. 8.24.

Из уравнений (8.29), (8.30), (8.31) получим

$$y'' = \frac{M_0}{EI_z},\ \theta(x) = \frac{M_0x}{EI_z} + C_1,\ y(x) = \frac{M_0\frac{x^2}{2}}{EI_z} + C_1x + C_2.$$

В заделке прогиб $y(0)$ и угол поворота сечения $\theta(0)$ равны нулю. Эти граничные условия будут удовлетворены, если $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Следовательно, балка изогнется по дуге параболы:

$$\theta(x)=\frac{M_0 x}{EI_z};\ y(x)=\frac{M_0\frac{x^2}{2}}{EI_z}.$$

На этом примере наглядно проявляется приближенный характер уравнения (8.29), так как при постоянном изгибающем моменте согласно равенству

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_z}{EI_z}=\frac{M_0}{EI_z}=\text{const}$$

балка должна изгибаться по дуге окружности радиуса ρ. Однако в пределах длины балки указанные дуги окружности и параболы практически совпадают.

Пример 8.5. Для консольной балки с сосредоточенной силой P на свободном конце найти аналитические выражения для прогибов и углов поворота (рис.8.25).

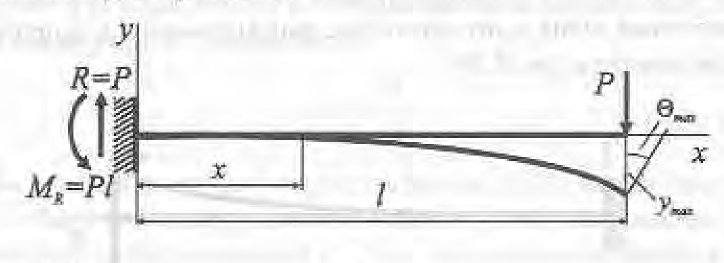


Рис. 8.25.

Реактивная сила $R = P$, момент в заделке — $M_R = Pl$. В произвольном сечении на расстоянии x от заделки имеем.

$$y''=\frac{Px-Pl}{EI_z},\ \theta(x)=\frac{P}{2EI_z}x^2-\frac{Plx}{EI_z}+C_1,$$

$$y(x)=\frac{P}{6EI_z}x^3-\frac{Plx^2}{2EI_z}+C_1x+C_2.$$

В заделке прогиб $y(0)$ и угол поворота сечения $\theta(0)$ равны нулю. Эти граничные условия будут удовлетворены, если $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Окончательно имеем:

$$\theta(x)=\frac{P}{2EI_z}\cdot x^2-\frac{Plx}{EI_z};\ y(x)=\frac{P}{6EI_z}\cdot x^3-\frac{Plx^2}{2EI_z}.$$

Максимальные прогиб и угол поворота будут на правом свободном конце балки:

$$y_{\max}=y(x=l)=-\frac{Pl^3}{3EI_z},\ \theta_{\max}=\theta(x=l)=-\frac{Pl^2}{2EI_z}. \qquad (8.32).$$

Знак минус в формулах для прогиба и угла поворота означает, что прогиб конца консольной балки направлен вниз, а поворот концевого сечения — по часовой стрелке.

Пример 8.6. Для балки нагруженной распределенной нагрузкой найти аналитические выражения для прогибов и углов поворота (рис.8.26).

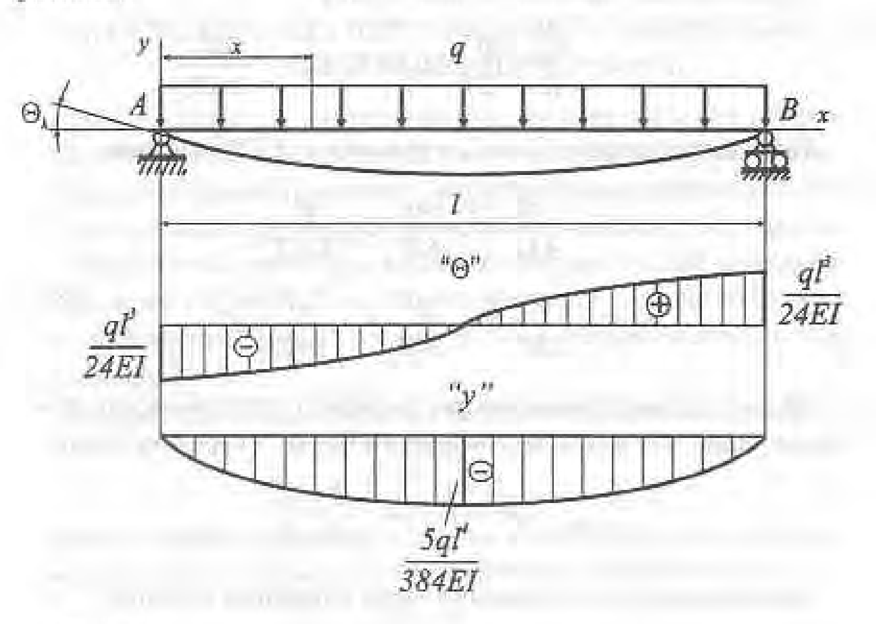


Рис. 8.26.

Изгибающий момент в произвольном поперечном сечении равен

$$M_z(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}.$$

В произвольном сечении на расстоянии x от опоры A имеем

$$y''=\frac{\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}}{EI_z},\ \theta(x)=\frac{ql}{4EI_z}x^2-\frac{qx^3}{6EI_z}+C_1,$$

$$y(x)=\frac{ql}{12EI_z}x^3-\frac{qx^4}{24EI_z}+C_1x+C_2. \qquad (8.33)$$

Из условия для прогиба на левой опоре

$$y(0)=0,\ C_2=0.$$

Из условия для прогиба на правой опоре

$$y(x=l)=\frac{ql^4}{12}-\frac{ql^4}{24}+C_1l=0,\ C_1=-\frac{ql^3}{24EI_z}.$$

Подставив значения C_1 и C_2 в уравнение (8.33), получим

$$\theta(x)=\frac{ql}{4EI_z}x^2-\frac{qx^3}{6EI_z}-\frac{ql^3}{24EI_z},$$

$$y(x)=\frac{ql}{12EI_z}x^3-\frac{qx^4}{24EI_z}-\frac{ql^3}{24EI_z}x. \qquad (8.34)$$

На рис. 8.26 построены эпюры прогибов и углов поворота, из которых видно, что максимальный прогиб будет в середине балки

$$y_{\max}=y(x=l/2)=-\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_z}.$$

Максимальные углы поворота будут в опорных сечениях:

$$\theta_A=\theta(x=0)=-\frac{1}{24}\frac{ql^3}{EI_z};\ \theta_B=\theta(x=l)=\frac{1}{24}\frac{ql^3}{EI_z}.$$

8.10. РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

В практических расчетах нередки случаи, когда в балке, сечение которой выбрано из условия прочности, перемещения оказываются слишком большими – превышающими установленные для них нормы. Поэтому, кроме расчета на прочность, балки должны проверяться также и на жесткость. Обозначив допускаемую стрелу прогиба через $[f]$, получим условие жесткости балки

$$f\le[f]. \qquad (8.35)$$

Допускаемые значения стрелы прогиба зависят от назначения конструкции и колеблются в широких пределах. Так, например, в строительных конструкциях допускаемые значения относительных прогибов $[f/l]$ колеблются от 1/150 до 1/400. При расчете валов допускаемый относительный прогиб обычно ограничивается 1/1000.

8.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА МОРА

Одним из наиболее эффективных методов определения перемещений при упругих деформациях балок является **интеграл Мора**.

Определим прогиб δ_{CP} точки C в произвольном направлении оси балки, нагруженной некоторой системой внешних сил. Без нарушения общности обозначим всю внешнюю нагрузку одной сосредоточенной силой P (рис. 8.27, а). Обозначим через δ_{PP} прогиб балки в точке приложения силы P, а через δ_{CP} — искомый прогиб от этой силы в точке C.

При статическом приложении к балке сила P выполняет работу

$$A=\frac{P\delta_{PP}}{2}.$$

Потенциальная энергия деформации в этом случае без учета влияния перерезывающих сил Q определяется по формуле (8.22):

$$U=\int_l\frac{M_z^2(x)}{2EI_z}dx. \qquad (8.36)$$

С учетом баланса энергий $A=U$, получаем

$$\frac{P\delta_{PP}}{2}=\int_l\frac{M_z^2(x)}{2EI_z}dx. \qquad (8.37)$$

Снимем с балки всю внешнюю нагрузку и приложим статически в сечении C в направлении искомого перемещения вспомогательную силу Ф (рис.8.27, б). От действия этой силы в сечениях балки возникнут изгибающие моменты M_z^{Φ}, а точка C в процессе деформации балки пройдет путь $\delta_{C\Phi}$ (рис. 8.27, б). Баланс энергий в этом случае принимает вид:

$$\frac{\Phi\delta_{C\Phi}}{2}=\int_l \frac{\left[M_z^{\Phi}(x)\right]^2}{2EI_z}dx. \tag{8.38}$$

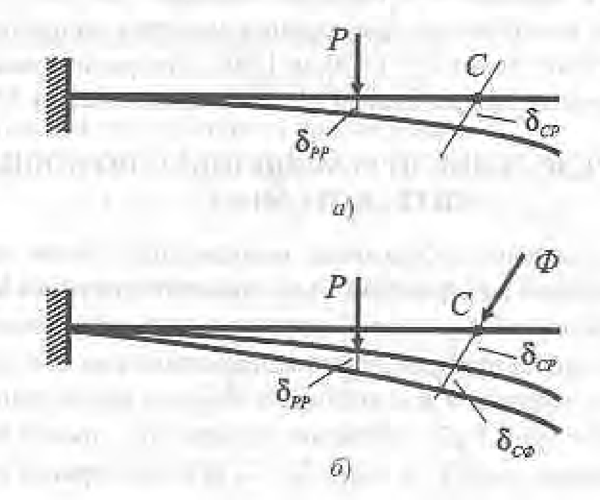


Рис. 8.27.

Если к балке, уже нагруженной вспомогательной силой Ф, приложить внешнюю нагрузка P (рис. 8.27, б), то эта нагрузка вызовет дополнительную деформацию балки. Причем согласно принципу независимости действия сил она будет такой же, как и в первом случае, когда балка нагружалась только силой P. Поэтому работа внешних сил, если подсчитывать ее в указанной последовательности, равна

$$A=\frac{\Phi\delta_{C\Phi}}{2}+\frac{P\delta_{PP}}{2}+\Phi\delta_{CP}. \tag{8.39}$$

У последнего слагаемого множитель 0,5 отсутствует потому, что к моменту приложения заданной нагрузки вспомогательная сила достигла уже своего конечного значения и в процессе перемещения δ_{CP} величины своей не изменяет (рис. 8.28).

Изгибающие моменты в сечениях балки под действием внешней нагрузки и вспомогательной силы равны суммам изгибающих моментов M_z от заданных нагрузок и M_z^{Φ} от вспомогательной силы, а потенциальная энергия деформации равна

$$U=\int_l \frac{\left[M_z(x)+M_z^{\Phi}(x)\right]^2}{2EI_z}dx=$$

$$=\int_l \frac{\left[M_z(x)\right]^2}{2EI_z}dx+\int_l \frac{M_z(x)M_z^{\Phi}(x)}{EI_z}dx+\int_l \frac{\left[M_z^{\Phi}(x)\right]^2}{2EI_z}dx. \tag{8.40}$$

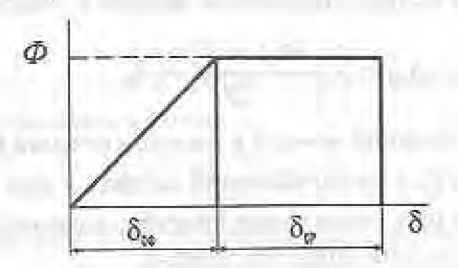


Рис. 8.28.

Баланс энергий в этом случае имеет вид:

$$\frac{\Phi\delta_{C\Phi}}{2}+\frac{P\delta_{PP}}{2}+\Phi\delta_{CP}=$$

$$=\int_l \frac{\left[M_z(x)\right]^2}{2EI_z}dx+\int_l \frac{M_z(x)M_z^{\Phi}(x)}{EI_z}dx+\int_l \frac{\left[M_z^{\Phi}(x)\right]^2}{2EI_z}dx. \tag{8.41}$$

С учетом уравнений (8.37) и (8.38), получим

$$\Phi\delta_{CP}=\int_l \frac{M_z(x)M_z^{\Phi}(x)}{EI_z}dx. \tag{8.42}$$

Из уравнения (8.42) видно, что вспомогательная сила может иметь любое числовое значение, например Ф = 1, так как $M_z^Ф(x) = ФM_z^1(x)$ и вспомогательные силы, в уравнении (8.42) сокращаются. Таким образом, получаем для определения прогибов балки выражение

$$\delta_{CP} = \int_l \frac{M_z(x)M_z^1(x)}{EI_z}dx, \qquad (8.43)$$

где M_z^1 имеет размерность длины.

Для определения угла поворота сечения C необходимо в данном сечении приложить в направлении перемещения единичный момент, а под δ_{CP} понимать угол поворота сечения.

В выражении (8.43) интеграл распространяется на всю длину балки. Если балка имеет n участков с различными аналитическими выражениями для изгибающих моментов $M_z(x)$ и $M_z^1(x)$, то прогиб в точке C равняется сумме интегралов по всем n участкам:

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z(x)M_z^1(x)}{EI_z}dx, \qquad (8.44)$$

где $M_z(x)$ — изгибающий момент в текущем сечении балки от заданной нагрузки; $M_z^1(x)$ — изгибающий момент в том же сечении от единичной силы при нахождении прогиба, и единичного момента, если определяется угол поворота сечения.

Для определения $M_z^1(x)$ надо снять с балки заданную нагрузку (но не удалять опоры) и приложить в сечении, перемещение которого ищется, в направлении данного перемещения единичную силу или пару $M_z(x)$ и $M_z^1(x)$. Моменты подставляются в интеграл Мора с учетом их знаков. Положительный знак в окончательном выражении означает, что сечение перемещается по направлению приложенной единичной нагрузки, а отрицательный знак показывает, что перемещение происходит в противоположном направлении.

8.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СПОСОБОМ ВЕРЕЩАГИНА

А.Н. Верещагин предложил простой способ вычисления интеграла Мора в случаях, когда эпюра M_z^1 является прямолинейной:

$$\varphi(x) = kx + b.$$

Рассмотрим участок балки, в пределах которого эпюра изгибающих моментов от единичной нагрузки ограничена одной прямой линией $M_z^1(x) = kx + b$, а изгибающий момент от заданной нагрузки изменяется по некоторому произвольному закону $M_z(x)$ (рис. 8.29). Тогда в пределах этого участка

$$\int_l M_z(x)M_z^1(x)dx = \int_l M_z(x)(kx+b)dx =$$

$$= k\int_l xM_z(x)dx + b\int_l M_z(x)dx.$$

Второй интеграл представляет собой площадь ω эпюры M_z на рассматриваемом участке, а первый — статический момент этой площади относительно оси y и поэтому равен произведению площади ω на координату ее центра тяжести x_C. Таким образом,

$$\int_l M_z(x)M_z^1(x)dx = \omega(kx_C + b),$$

где $y_C = kx_C + b$ — ордината эпюры M_z^1 под центром тяжести (цт) площади ω. Окончательно имеем

$$\int_l M_z(x)M_z^1(x)dx = \omega\, y_C. \qquad (8.45)$$

Произведение ωy_C будет положительным, когда ω и y_C расположены по одну сторону от оси эпюры, и отрицательным, если они находятся по разные стороны.

Таким образом, интегрирование заменяется перемножением площади ω одной эпюры на ординату y_C второй (линейной) эпюры, взятой под центром тяжести площади ω.

При вычислении перемещений сечений балок способом Верещагина интеграл Мора по всей длине балки заменяется суммой интегралов по участкам, в пределах которых эпюра моментов от единичной нагрузки не имеет изломов. Тогда

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z(x)M_z^1(x)}{EI_z}dx = \sum_1^n \frac{\omega\, y_C}{EI_z}. \qquad (8.46)$$

Если обе эпюры M_z и M_z^1 линейные, конечный результат их перемножения не зависит от того, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или, наоборот, площадь второй на ординату первой.

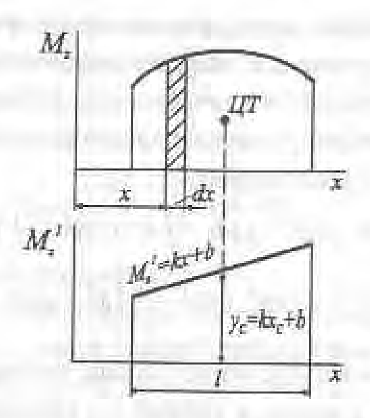


Рис. 8.29.

Для вычисления перемещений способом Верещагина надо:

1) построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (основная эпюра);
2) снять с балки заданную нагрузку (но сохранить опоры) и приложить в сечение, перемещение которого ищется, в направлении этого перемещения единичную силу, если ищется прогиб, или единичную пару, если определяется угол поворота;
3) построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки (единичная эпюра);
4) разбить эпюры от заданных нагрузок на отдельные площади ω_i и вычислить ординаты y_{Ci} единичной эпюры под центрами тяжести этих площадей;
5) составить произведения ω_i, y_{Ci} и просуммировать их.

8.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА «ДИРИЖЕРА»

Правило «дирижера» используется для быстрого вычисления интеграла Мора в случае, когда одна из перемножаемых эпюр описывается квадратичной параболой, а другая – прямолинейной зависимостью (рис. 8.30).

Подставляя аналитические выражения для моментов в интеграл Мора, получим

$$\delta = \int_l \frac{M_z(x)M_z^1(x)}{EI_z}dx =$$
$$= \frac{l}{6EI_z}(2ac + 2bd + bc + ad) \pm \frac{ql^3}{24EI_z}(c + d). \qquad (8.47)$$

Знак плюс в формуле (8.47) ставится, если эпюра $M_z(x)$ — выпуклая в сторону от оси эпюры, и знак минус, если вогнутая (эпюра на рис.8.30 со знаком плюс). Если эпюра $M_z(x)$ прямолинейная, то второе слагаемое в формуле (8.47) равно нулю.

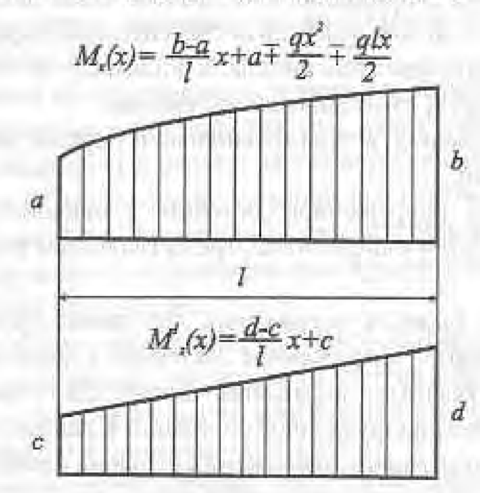


Рис. 8.30.

Глава 9. КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Для определения напряженного состояния в какой-нибудь точке тела, нужно вокруг этой точки выделить элементарный параллелепипед.

По граням этого параллелепипеда, в общем случае, будут действовать нормальные и касательные напряжения.

Зная эти напряжения, всегда можно найти главные напряжения и главные площадки.

Следовательно, напряженное состояние в каждой точке тела, в конечном счете, будет определяться тремя главными напряжениями s_1, s_2, s_3.

Если из трех главных напряжений два равны нулю, то будет иметь место линейное напряженное состояние в данной точке тела.

Если из трех главных напряжений только одно равно нулю, то речь идет о плоском напряженном состоянии в данной точке тела.

Если ни одно из главных напряжений не равно нулю, то в данной точке тела объемное напряженное состояние.

Если во всех точках тела наблюдается один и тот же тип напряженного состояния, то можно говорить об однородном напряженном состоянии тела.

Линейное напряженное состояние считается простым напряженным состоянием, плоское и объемное напряженное состояние — сложными.

Вид напряженного состояния нельзя отождествлять с одноименным видом деформации: так при линейном напряженном состоянии могут происходить объемные деформации и т. п.

9.1. ГИПОТЕЗЫ (ТЕОРИИ) ПРОЧНОСТИ

Установлено, что в каждой точке нагруженного тела, в общем случае действует три главных напряжения.

Опыт показывает, что поведение материалов, т. е. начало стадии пластических деформаций и характер разрушения (хрупкий, вязкий), зависят от величины, знака и соотношения главных напряжений.

Поэтому, чтобы судить о прочности материала при сложном напряженном состоянии, необходимо предварительно знать — в какой момент при той или иной комбинации главных напряжений наступает опасное состояние материала.

При простом напряженном состоянии ответ на этот вопрос дают диаграммы растяжения или сжатия. Предельными напряжениями считаются такие, при которых хрупкий материал разрушается, а пластичный материал получает недопустимо большие пластические деформации.

При сложном напряженном состоянии все значительно сложнее, т. к. число различных сочетаний главных напряжений неограниченно велико, а опытные исследования технически очень сложны.

Поэтому при составлении условий прочности материала при сложном напряженном состоянии мы располагаем только допускаемыми напряжениями, установленными путем испытаний на простое растяжение или сжатие.

В связи с этим ставится задача: зная максимально допустимые безопасные напряжения при простом растяжении, найти эквивалентную, т. е. равнобезопасную комбинацию из главных напряжений при сложном напряженном состоянии.

Единственным путем решения этой задачи является установление общих критериев разрушения, которые позволили бы оценить опасность перехода материала в предельное состояние при сложном напряженном состоянии, используя лишь данные опытов на растяжение.

Критерии разрушения или гипотезы прочности представляют собой предположения о преимущественном влиянии на прочность материалов того или иного фактора, сопутствующего процессам деформации и разрушения материалов.

Наиболее важными факторами, связанными с возникновением опасного состояния материала, являются: нормальные и касательные напряжения, линейные деформации и потенциальная энергия деформации.

При сложном напряженном состоянии следует говорить не о предельном напряжении, а о предельном напряженном состоянии.

Предельным состоянием в опасной точке детали считается переход материала в окрестности данной точки из упругого состояния в пластическое или разрушение детали, выражающееся в образовании трещин.

Будем рассматривать такие случаи напряженного состояния, при которых нагрузки возрастают пропорционально некоторому параметру, вплоть до наступления предельного напряженного состояния. При этом главные напряжения также возрастают пропорционально.

Коэффициентом запаса прочности при сложном напряженном состоянии называется число, на которое следует умножить все

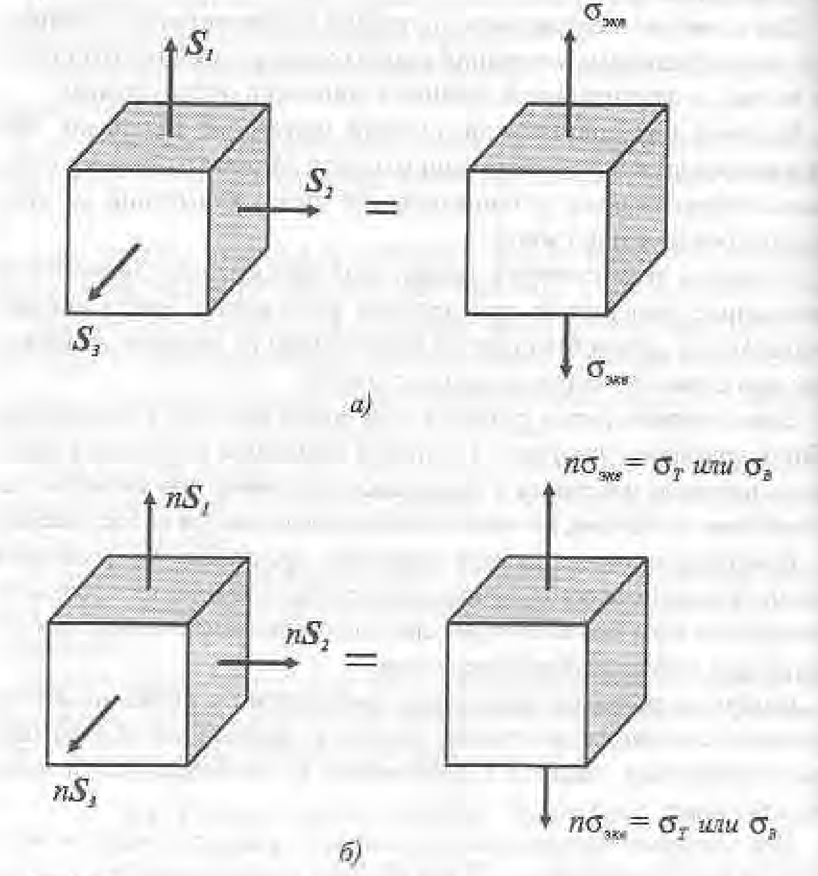


Рис. 9.1.

компоненты тензора напряжений (или s_1, s_2, s_3), чтобы данное напряженное состояние стало предельным.

Равноопасными называются такие напряженные состояния, у которых коэффициенты запаса прочности равны.

Это позволяет сравнивать все напряженные состояния между собой, заменяя их равноопасным одноосным напряженным состоянием (растяжением).

Эквивалентным напряжением называется напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало **равноопасным** заданному напряженному состоянию (рис.9.1).

Заменяя сложное напряженное состояние эквивалентным растяжением, получаем возможность использовать при сложном напряженном состоянии **условие прочности** при простом растяжении:

$$\sigma_{экв} \leq [\sigma]. \qquad (9.1)$$

Условие наступления предельного состояния имеет вид:

$$\sigma_{экв} = \sigma_T \text{ или } \sigma_{экв} = \sigma_B. \qquad (9.2)$$

9.2. КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Критерии пластичности представляют собой меру напряженного состояния, определяющую условия перехода материала в предельное состояние, то есть из упругого состояния в состояние пластичности.

9.2.1. Гипотеза наибольших касательных напряжений (III теория прочности)

В основе теории наибольших касательных напряжений лежит гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине касательных напряжений, согласно которой **опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее из касательных напряжений достигает величины, соответствующей пределу текучести при простом растяжении.**

При объемном напряженном состоянии

$$\tau_{max} = \frac{s_1 - s_3}{2}. \quad (9.3)$$

При простом растяжении ($s_2 = s_3 = 0$)

$$\tau_{max\,P} = \frac{s_1}{2}.$$

Предельное значение максимальных касательных напряжений при растяжении

$$(\tau_{max\,P})_{пред} = \frac{\sigma_T}{2}. \quad (9.4)$$

На основании сформулированной гипотезы, имеем

$$\tau_{max} = (\tau_{max\,P})_{пред}$$

или с учетом формул (9.3) и (9.4)

$$s_1 - s_3 = \sigma_T.$$

Сравнивая с условием наступления предельного состояния, формула (9.2), получим эквивалентное напряжение по III теории прочности:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - s_3. \quad (9.5)$$

Условие прочности в соответствии с формулой (9.1) имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - s_3 \le [\sigma]. \quad (9.6)$$

Данная теория прочности хорошо согласуется с результатами испытания изотропных материалов, поэтому она широко применяется для расчета деталей из металлических материалов.

9.2.2. Теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения (IV теория прочности)

В основе энергетической теории прочности лежит гипотеза о преимущественном влиянии удельной потенциальной энергии изменения формы, согласно которой **опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает величины, соответствующей пределу текучести при простом растяжении.**

При объемном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия изменения формы, уравнение (3.49), выраженная через главные напряжения равна

$$u_ф = \frac{1+\mu}{6E}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2\right]. \quad (9.7)$$

При простом растяжении ($s_2 = s_3 = 0$)

$$u_{фP} = \frac{1+\mu}{3E} s_1^2. \quad (9.8)$$

Предельное значение удельной потенциальной энергии изменения формы при растяжении определяется уравнением

$$(u_{фP})_{пред} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_T^2. \quad (9.9)$$

На основании данной гипотезы, имеем

$$u_ф = (u_{фP})_{пред}$$

или с учетом формул (9.7) и (9.9)

$$\frac{1}{2}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2\right] = \sigma_T^2. \quad (9.10)$$

Сравнивая с условием наступления предельного состояния, формула (9.2), получим эквивалентное напряжение по IV теории прочности:

$$(\sigma_{экв})_{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2\right]}. \quad (9.11)$$

Условие прочности в соответствии с выражением (9.1) имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2\right]} \le [\sigma]. \quad (9.12)$$

Данная теория хорошо согласуется с результатами испытания изотропных материалов, поэтому она широко применяется при расчете деталей из металлических материалов.

9.2.3. Теория прочности Мора (V теория прочности)

Теория прочности Мора позволяет учесть различие свойств материалов при растяжении и сжатии. Она получается изменением теории наибольших касательных напряжений в соответствии с уравнением

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - ks_3 = \sigma_{Tp}. \qquad (9.13)$$

При одноосном сжатии в предельном случае, когда $s_1 = 0$, $s_3 = -\sigma_{Tсж}$

$$(\sigma_{экв})_{III} = 0 - k(-\sigma_{Tсж}) = \sigma_{Tp}. \qquad (9.14)$$

Отсюда определяется коэффициент k:

— для пластичных материалов $k = \dfrac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tсж}} \approx \dfrac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$, (9.15)

— для хрупких материалов $k = \dfrac{\sigma_{Bp}}{\sigma_{Bсж}} \approx \dfrac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$. (9.16)

Условие прочности по теории Мора имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - ks_3 \le [\sigma]_p. \qquad (9.17)$$

9.3. КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ

Критерии разрушения представляют собой меру напряженного состояния, определяющую условия перехода материала в предельное состояние, т.е. в состояние разрушения.

9.3.1. Гипотеза наибольших нормальных напряжений (I теория прочности)

В основе теории наибольших нормальных напряжений лежит гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине нормальных напряжений, согласно которой **опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее из главных напряжений достигает величины, соответствующей пределу прочности при простом растяжении.**

В этом случае условие прочности:

— при растяжении $\sigma_{max} = s_1 \le [\sigma]$, (9.18)

— при сжатии $\sigma_{max} = |s_1| \le [\sigma]$. (9.19)

Данная гипотеза удовлетворительно согласуется с результатами испытания деталей из хрупких материалов, таких как камень, кирпич, чугун. Для расчета деталей из пластичных материалов она непригодна.

9.3.2. Гипотеза наибольших линейных деформаций (II теория прочности)

В основе теории наибольших линейных деформаций лежит гипотеза о преимущественном влиянии наибольших по абсолютной величине линейных деформаций, согласно которой **опасное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее из относительных удлинений достигает опасной величины, соответствующей пределу прочности при простом растяжении.**

Максимальные относительные деформации в соответствии с обобщенным законом Гука, формула (3.36), равны:

— при растяжении $\varepsilon_{max} = e_1 = \dfrac{1}{E}\left[s_1 - m(s_2 + s_3)\right]$, (9.20)

— при сжатии $\varepsilon_{max} = |\varepsilon_3| = \dfrac{1}{E}\left|\,\left[s_3 - \mu(s_2 + s_1)\right]\,\right|$. (9.21)

При простом растяжении

$$\varepsilon_{max\,p} = \frac{s_1}{E}. \qquad (9.22)$$

Предельное значение относительной деформации при растяжении

$$(\varepsilon_{max\,p})_{пред} = \frac{\sigma_B}{E}. \qquad (9.23)$$

На основании сформулированной гипотезы, имеем

$$\varepsilon_{max} = (\varepsilon_{max\,p})_{пред}$$

или с учетом формул (9.20) и (9.23)

$$\left[s_1 - \mu(s_2 + s_3)\right] = \sigma_B. \qquad (9.24)$$

Сравнивая с условием наступления предельного состояния, выражение (9.2), получим эквивалентное напряжение по II теории прочности:

$$(\sigma_{экв})_{II} = \left[s_1 - \mu(s_2 + s_3)\right]. \qquad (9.25)$$

Условие прочности в соответствии с выражением (9.1) имеет вид:

— при растяжении $(\sigma_{экв})_{II} = [s_1 - \mu(s_2 + s_3)] \le [\sigma]_p$, (9.26)

— при сжатии $(\sigma_{экв})_{II} = |\ [s_3 - \mu(s_2 + s_1)]\ | \le [\sigma]_{сж}$. (9.27)

Из уравнений (9.26) и (9.27) вытекает, что простое растяжение более опасно, нежели сложное. Однако опыты этого не подтверждают. В связи с этим данная теория для расчета деталей не используется.

9.4. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ВЫБОРУ ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Анализ многочисленных теорий предельных состояний показывает, что совершенных теорий не существует. Каждая из теорий справедлива только в определенных условиях и для определенных материалов. Приведенными выше теориями можно пользоваться только при напряженных состояниях с главными напряжениями разных знаков. Возможность применения этих теорий в случаях трехосного растяжения или сжатия требует дополнительных экспериментальных исследований.

При выборе теории прочности в случае плоского напряженного состояния и объемного напряженного состояния с главными напряжениями разных знаков следует учитывать свойства материала. Если материал пластичен и одинаково работает на растяжение и сжатие, то следует пользоваться теорией наибольшей энергии формоизменения или теорией максимальных касательных напряжений. Если пластичный материал неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то следует применить теорию Мора. Расчет хрупких материалов при указанных напряженных состояниях целесообразно проводить по теории Мора.

Пример 9.1. Определить допускаемое касательное напряжение, используя III и IV теории прочности.

Как известно, при чистом сдвиге $s_1 = \tau$, $s_3 = -\tau$, $s_2 = 0$.

Эквивалентное напряжение по теории максимальных касательных напряжений при чистом сдвиге имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - s_3 = 2\tau \le [\sigma],$$

откуда получаем

$$[\tau] = 0{,}5[\sigma]. \qquad (9.28)$$

Эквивалентное напряжение по теории удельной потенциальной энергии формоизменения при чистом сдвиге имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2\right]} = \sqrt{3}\tau \le [\sigma]$$

Тогда

$$[\tau] = 0{,}577[\sigma]. \qquad (9.29)$$

Оба результата согласуются с опытными данными.

$$[\tau] = (0{,}5...0{,}65)[\sigma].$$

Пример 9.2. Проверить прочность вала, передающего крутящий момент 1000 Нм по теории максимальных касательных напряжений, если диаметр вала $d = 4$ см, основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Максимальное касательное напряжение при кручении круглого вала

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_p} = \frac{16 \cdot 1000}{\pi 4^3 \cdot 10^{-6}} = 79{,}6 \text{ МПа}.$$

При кручении в поперечных сечениях имеет место напряженное состояние чистого сдвига $s_1 = \tau_{max}$, $s_3 = -\tau_{max}$, $s_2 = 0$.

Условие прочности по теории максимальных касательных напряжений имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - s_3 = 2\tau_{max} = 159{,}2 \le [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

т.е. условие прочности удовлетворяется.

Пример 9.3. Подобрать диаметр вала, передающего крутящий момент 1000 Нм на основании теории прочности Мора, если $\sigma_{Bp} = 400$ МПа, $\sigma_{Bсж} = 1600$ МПа, коэффициент запаса прочности при растяжении $n = 4$.

Коэффициент k условия прочности Мора, выражение (9.17), определяется уравнением (9.16):

$$k = \frac{\sigma_{Bp}}{\sigma_{Bсж}} = \frac{400}{1600} = 0{,}25.$$

Допускаемое напряжение на растяжение определяется из следующего уравнения

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_{Bp}}{n} = 400/4 = 100 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по теории Мора при чистом сдвиге, имеющем место при кручении, имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - ks_3 = s_1(1+k) = \tau_{max}(1+k) = \frac{M_к}{W_p}(1+k) =$$

$$= \frac{16M_к(1+k)}{\pi d^3} \le [\sigma]_p.$$

Откуда определяется необходимый диаметр вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16M_к(1+k)}{\pi[\sigma]_p}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 1000\cdot(1+0{,}25)}{\pi 100\cdot 10^6}} = 4\cdot 10^{-2}\text{м} = 4 \text{ см}.$$

Пример 9.4. Определить аналитические выражения эквивалентных напряжений по III и IV теориям прочности для напряженного состояния, имеющего место в промежуточных точках поперечного сечения при плоском прямом поперечном изгибе бруса.

Главные напряжения в промежуточных точках поперечного сечения при плоском прямом поперечном изгибе бруса определяются уравнением (8.23):

$$s_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad s_2 = 0.$$

Следовательно, эквивалентное напряжение по III теории прочности в этом случае имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - s_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad (9.30)$$

Эквивалентное напряжение по IV теории прочности имеет вид:

$$(\sigma_{экв})_{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2\right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \qquad (9.31)$$

С помощью уравнений (9.30) и (9.31) можно проверять прочность балок с учетом как нормальных, так и касательных напряжений, действующих в поперечных сечениях.

Глава 10. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

К сложному сопротивлению относятся такие виды нагружения бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает не менее двух внутренних силовых факторов. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при этом в сечениях возникают изгибающий момент и поперечная сила, так как в большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость проводятся без учета влияния поперечной силы.

Сложное сопротивление можно условно разделить на две группы.

К первой группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда в опасных точках бруса напряженное состояние является одноосным или приближенно одноосным (если не учитывать влияния поперечных сил и соответственно касательных напряжений). Такими являются косой (двойной) изгиб, внецентренное растяжение-сжатие, изгиб с растяжением (сжатием).

Ко второй группе относятся такие случаи сложного сопротивления, когда в опасных точках бруса напряженное состояние является плоским. Такими являются изгиб с кручением, растяжение (сжатие) с кручением, растяжение (сжатие) с изгибом и кручением и т.д.

Для первой группы в отличие от второй группы нет необходимости в применении гипотез прочности.

10.1. КОСОЙ (ДВОЙНОЙ) ИЗГИБ

Косой изгиб возникает в том случае, если плоскость действия изгибающего момента не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения балки.

Такое нагружение имеет место при изгибе консольного бруса прямоугольного поперечного сечения силой, приложенной к плос-

кости торцевого сечения под некоторым углом α к его оси симметрии (рис. 10.1). Косой изгиб является плоским, т.е. изогнутая ось балки остается после деформации плоской кривой, но характеризуется тем, что в отличие от прямого изгиба, силовая плоскость и плоскость, в которой расположена изогнутая ось (плоскость изгиба), не совпадают.

Косой изгиб можно представить, как сумму двух прямых изгибов, если разложить изгибающий момент по главным плоскостям балки на два составляющих момента M_y и M_z.

Рассмотрим равновесие отсеченной правой части сечения на расстоянии x (рис. 10.1) от правого конца бруса.

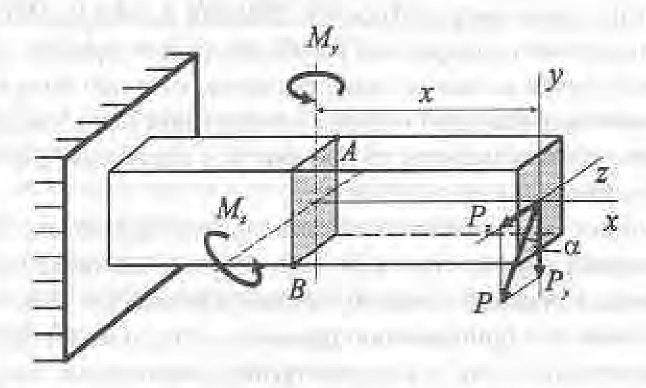


Рис. 10.1.

Представим изгибающий момент в левом сечении (со стороны внешней нормали) в виде вектора, нормального к плоскости действия этого момента (рис. 10.2), тогда

$$M_y = M\sin\alpha;\ M_z = M\cos\alpha,$$

где $M = Px$ — изгибающий момент в данном поперечном сечении.

На основании принципа независимости действия сил косой изгиб рассматривается как результат действия двух прямых изгибов, действующих в главных плоскостях. Это справедливо, если напряжения от отдельного действия изгибающих моментов, а также суммарное напряжение, не превышают предела пропорциональности. Нормальное напряжение σ в какой-либо точке поперечного сечения при косом изгибе равно алгебраической сумме нормальных напряжений, вызванных в этой точке моментами M_y и M_z:

$$\sigma(y,z) = \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z, \tag{10.1}$$

где y и z — координаты данной точки сечения в осях, совмещенных с главными центральными осями инерции сечения.

Эпюра нормальных напряжений для прямоугольного сечения при косом изгибе показана на рис. 10.3.

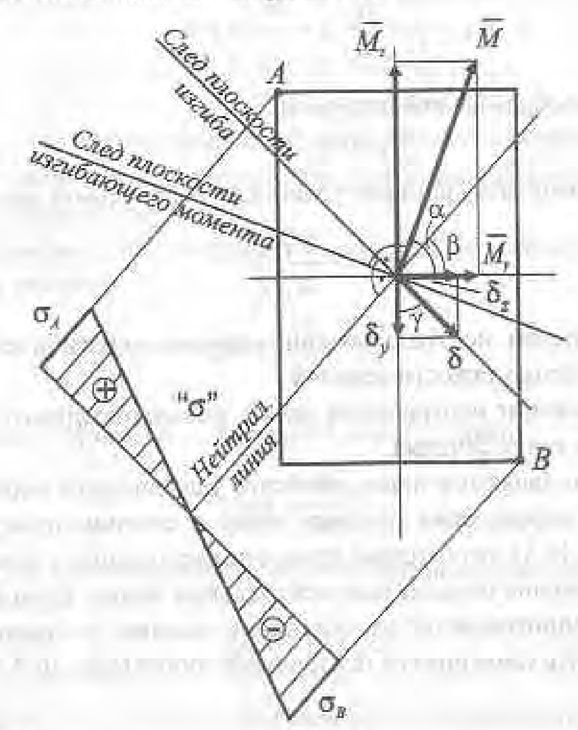


Рис. 10.2.

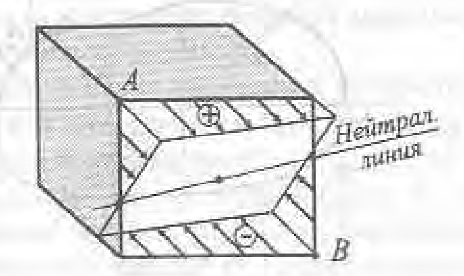


Рис. 10.3.

Геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю, называется нейтральной линией сечения. Она делит сечение на две части, в одной из которых действуют растягивающие, а в другой – сжимающие напряжения. Приравнивая к нулю правую часть равенства (10.1), найдем уравнение нейтральной линии:

$$\sigma(y,z)=\frac{M_z}{I_z}y+\frac{M_y}{I_y}z=0. \tag{10.2}$$

После преобразований получаем:

$$y=kz, \tag{10.3}$$

где k — угловой коэффициент уравнения нейтральной линии равен

$$k=-\frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y}. \tag{10.4}$$

Таким образом, нейтральная линия при косом изгибе всегда проходит через центр тяжести сечения.

Зная положение нейтральной линии, можно определить положение опасных точек сечения.

Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Для определения опасных точек в сечении произвольной формы (рис. 10.4), необходимо провести касательные к контуру поперечного сечения параллельно нейтральной линии. Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то опасной будет точка, наиболее удаленная от нейтральной линии (рис. 10.4, точка A).

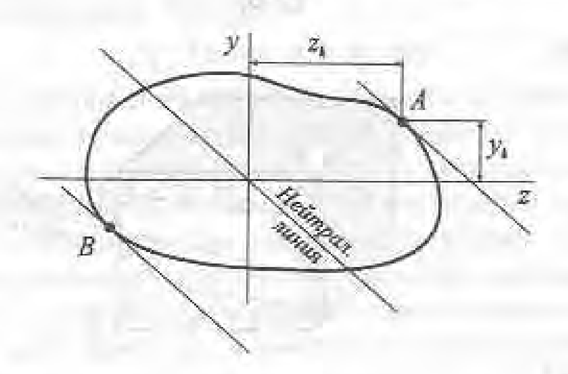


Рис. 10.4.

Для хрупких материалов необходимо проверить две точки A и B при условии, что в наиболее удаленной точке действуют сжимающие напряжения.

Для сечений, имеющих оси симметрии и выступающие углы (см. рис. 10.2), опасными будут угловые точки, в которых напряжения от обоих изгибающих моментов имеют одинаковый знак.

Условие прочности при косом изгибе имеет вид:

$$\sigma_{max}=\frac{M_z}{I_z}y_A+\frac{M_y}{I_y}z_A\leq[\sigma], \tag{10.5}$$

где y_A, z_A — координаты опасной точки опасного сечения бруса;

$[\sigma]$ — допускаемое напряжение для материала бруса при простом растяжении или сжатии.

Из формулы (10.3) следует, что нейтральная линия наклонена к оси z под углом β,

$$\mathrm{tg}\beta=-\frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y}. \tag{10.6}$$

Тангенс угла наклона вектора $\overline{M}$ к оси z равен

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{M_y}{M_z}. \tag{10.7}$$

Между углами α и β существует следующая зависимость:

$$\mathrm{tg}\beta=-\frac{I_z}{I_y}\mathrm{tg}\alpha. \tag{10.8}$$

Так как $I_y\neq I_z$, то угол α не равен углу β. Таким образом, при косом изгибе, в отличие от прямого изгиба, нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента, а составляет с ней угол $\varphi=|\beta-\alpha|$ (см. рис. 10.2).

При $I_y=I_z$ нейтральная линия нормальна к плоскости действия изгибающего момента. В этом случае любая центральная ось является главной и косой изгиб невозможен.

Полное перемещение δ центра сечения бруса на основании принципа независимости действия сил равно геометрической сумме перемещений, вызванных каждым из плоских изгибов в отдельности (рис. 10.2):

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2}. \quad (10.9)$$

При этом в общем случае справедливы следующие равенства:

$$\delta_y = \frac{M_z}{EI_z} \cdot f(x), \quad (10.10)$$

$$\delta_z = \frac{M_y}{EI_y} \cdot f(x), \quad (10.11)$$

где функция $f(x)$ определяется условиями нагружения и закрепления концов бруса.

Угол наклона вектора полного перемещения относительно оси y равен

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\delta_z}{\delta_y} = \frac{I_z}{I_y}\frac{M_y}{M_z} = -\operatorname{tg}\beta. \quad (10.12)$$

Следовательно $\beta = \gamma$. Это означает, что при косом изгибе смещение центра сечения происходит не в плоскости действия изгибающего момента, а в направлении нормали к нейтральной линии.

При косом изгибе прямого бруса нагрузками, расположенными в одной плоскости, упругая линия бруса будет плоской кривой. Однако плоскость изгиба не совпадает с плоскостью действия нагрузки.

Если внешние силы и пары, изгибающие брус, будут располагаться в разных плоскостях, то изогнутая ось бруса будет пространственной кривой.

Пример 10.1. Определить напряжения в опасных точках бруса (рис. 10.5) уголкового поперечного сечения. Дано: $P = 200$ Н, $l = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Равнобокий уголок № 5 по сортаменту имеет следующие параметры: $I_u = 17{,}8$ см4, $I_v = 4{,}63$ см4, $u_A = 1{,}52$ см, $u_B = -2{,}01$ см, $v_A = 3{,}53$ см, $v_B = 0$.

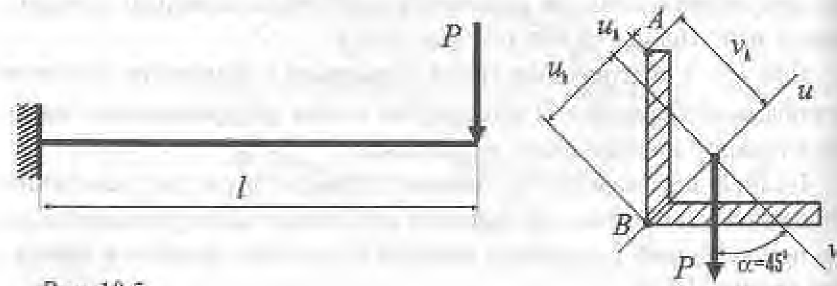


Рис. 10.5.

Так как главные центральные оси данного сечения проходят под углом 45° относительно исходных осей координат, а силовая плоскость вертикальна, имеет место косой изгиб.

Изгибающие моменты в главных плоскостях равны:

$$M_v = P_u l = Pl\sin 45^0 = Pl\sqrt{2}/2; \quad M_u = P_v l = Pl\cos 45^0 = Pl\sqrt{2}/2.$$

Напряжения в точках A и B определяются уравнением (10.1):

$$\sigma_A = \frac{M_v}{I_v}u_A + \frac{M_u}{I_u}v_A = \frac{200 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}/2}{4{,}63 \cdot 10^{-8}} 1{,}52 \cdot 10^{-2} +$$

$$+ \frac{200 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}/2}{17{,}8 \cdot 10^{-8}} 3{,}53 \cdot 10^{-2} = 74{,}5 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_B = \frac{M_v}{I_v}u_B + \frac{M_u}{I_u}v_B = -\frac{200 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}/2}{4{,}63 \cdot 10^{-8}} 2{,}01 \cdot 10^{-2} +$$

$$+ \frac{200 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}/2}{17{,}8 \cdot 10^{-8}} \cdot 0 = -61{,}4 \text{ МПа}.$$

Перемещения в главных плоскостях центра сечения конца консольной балки равны

$$\delta_u = \frac{P_u l^3}{3EI_v} = \frac{200 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}/2}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4{,}63 \cdot 10^{-8}} = 0{,}00509 \text{ м},$$

$$\delta_v = \frac{P_u l^3}{3EI_v} = \frac{200 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}/2}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 17{,}8 \cdot 10^{-8}} = 0{,}00132 \text{ м}.$$

Полное перемещение равно

$$\delta = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} = \sqrt{0{,}00132^2 + 0{,}00509^2} = 0{,}0053 \text{ м}.$$

10.2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Внецентренное растяжение (сжатие) возникает в том случае, если продольная сила, действующая на брус, параллельна оси бруса, но не совпадает с ней (рис. 10.6).

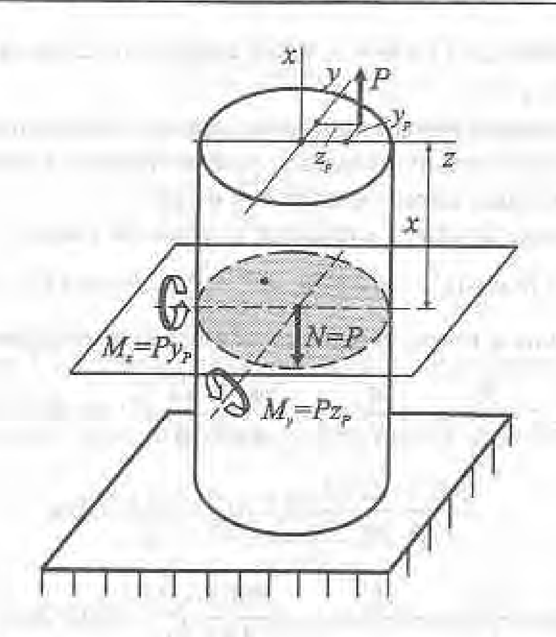


Рис. 10.6.

При переносе силы P в центр тяжести сечения внецентренное растяжение сводится к осевому растяжению и изгибу в двух плоскостях. Внутренние силовые факторы в произвольном поперечном сечении бруса определяются методом сечений:

$$N = P;\ M_y = P z_p;\ M_z = P y_p, \tag{10.13}$$

где y_p, z_p — координаты точки приложения силы.

В соответствии с принципом независимости действия сил напряжения в точках поперечного сечения при внецентренном растяжении (сжатии) определяются по формуле:

$$\sigma(y,z) = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = \frac{P}{F} + \frac{P z_p}{I_y} z + \frac{P y_p}{I_z} y \tag{10.14}$$

или

$$\sigma(y,z) = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{z_p}{i_y^2} z + \frac{y_p}{i_z^2} y\right), \tag{10.15}$$

где $i_y = \sqrt{I_y / F}$, $i_z = \sqrt{I_z / F}$ — радиусы инерции сечения.

Выражение в скобках в уравнении (10.15) показывает во сколько раз напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) больше напряжений центрального растяжения.

Приравнивая правую часть (10.15) к нулю получим уравнение нейтральной линии:

$$\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1. \tag{10.16}$$

Нейтральная линия при внецентренном растяжении (сжатии) не проходит через центр тяжести сечения, отсекает на осях координат отрезки

$$a = -\frac{i_z^2}{y_p};\ b = -\frac{i_y^2}{z_p}. \tag{10.17}$$

Из формулы (10.17) видно, что точка приложения силы и нейтральная линия всегда расположены по разные стороны от центра тяжести сечения, причем положение нейтральной линии определяется координатами точки приложения силы (рис. 10.7).

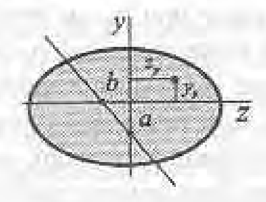


Рис. 10.7.

При приближении точки приложения силы к центру тяжести сечения координаты a и b по абсолютной величине увеличиваются, и нейтральная линия будет удаляться от центра. При этом в сечении увеличивается доля напряжений одного знака, так как уменьшаются напряжения от изгиба. При удалении точки приложения силы от центра тяжести сечения координаты a и b по абсолютной величине уменьшаются, и нейтральная линия будет приближаться к центру. При этом в сечении увеличивается доля напряжений разного знака, так как возрастают напряжения от изгиба. При $a = b = 0$ нейтральная линия удаляется в бесконечность. В этом случае будет иметь место центральное растяжение (сжатие) бруса.

Всегда можно найти такое положение точки приложения силы, при котором нейтральная линия будет касаться контура сечения, нигде не пересекая его. В этом случае в сечении напряжения будут только одного знака. Зона вблизи центра тяжести сечения, приложение продольной нагрузки в которой вызывает появление во всех точках сечения напряжений только одного знака, называется **ядром сечения**. До тех пор, пока точка приложения силы находится внутри ядра, нейтральная линия не пересекает контур сечения, и напряжения во всем сечении будут одного знака. Если точка приложения силы расположена вне ядра, то нейтральная линия пересекает контур сечения, и тогда в сечении будут действовать напряжения разного знака. Данное обстоятельство следует учитывать при расчете элементов конструкций из хрупких материалов, плохо воспринимающих растягивающие нагрузки. В этом случае необходимо прикладывать внешние силы так, чтобы во всем сечении действовали только напряжения сжатия. Для этого точка приложения равнодействующей внешних сил должна находиться внутри ядра сечения.

Расчет на прочность при внецентренном растяжении (сжатии) производится так же, как и при косом изгибе, — по нормальному напряжению в опасной точке поперечного сечения. Опасной точкой является точка, наиболее удаленная от нейтральной линии. Однако в тех случаях, когда в этой точке действует напряжение сжатия, а материал элемента конструкции хрупкий, опасной может быть точка, в которой действует наибольшее растягивающее напряжение. Эпюра напряжений строится на оси, перпендикулярной к нейтральной линии сечения и ограничена прямой линией.

Условие прочности при этом имеет вид:

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P z_p}{I_y} z_A + \frac{P y_p}{I_z} y_A \le [\sigma], \qquad (10.18)$$

где y_A, z_A — координаты опасной точки; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение и сжатие.

Пример 10.2. Определить, во сколько раз напряжения в опасной точке бруса круглого поперечного сечения при внецентренном приложении нагрузки больше, чем при центральном ее приложении (рис. 10.8).

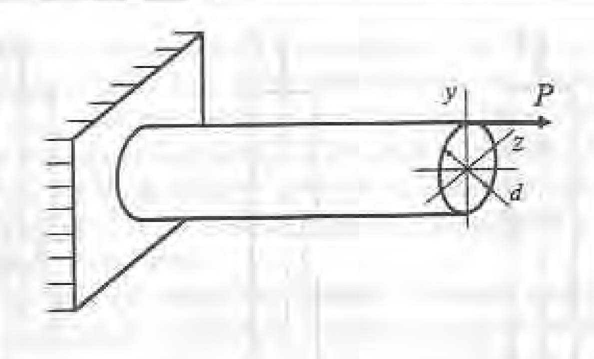


Рис. 10.8.

При внецентренном приложении нагрузки в поперечных сечениях бруса действует осевая сила $N = P$ и изгибающий момент $M_z = Pd/2$. Наиболее удалены от нейтральной линии точки с координатами $z = 0$, $y = a = d/2$. Напряжения в этих точках

$$\sigma_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{Pd/2}{\pi d^4/64}\frac{d}{2} = \frac{P}{F}(1+4) = 5\frac{P}{F}.$$

Таким образом, напряжение в опасной точке при внецентренном приложении нагрузки в пять раз больше, чем при центральном ее приложении. Это показывает, насколько важно для уменьшения напряжений обеспечивать центральное приложение нагрузки.

Пример 10.3. На кромке стального бруса квадратного поперечного сечения 10×10 см, растягиваемого силой $P = 10^6$ Н, появилась трещина (рис. 10.9). Чтобы трещина не распространялась, на ее месте была вырезана галтель глубиной 2 см. Определить, во сколько раз увеличились напряжения в опасной точке бруса.

При центрально приложенной силе (рис. 10.9, а) напряжения равны

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{10^6}{0{,}1 \cdot 0{,}1} = 100 \text{ МПа}.$$

При наличии галтели (рис. 10.9, б) центр тяжести сечения смещается вправо на величину $e = 1$ см, т.е. точка приложения силы P смещается относительно центра тяжести и имеет место внецентренное растяжение.

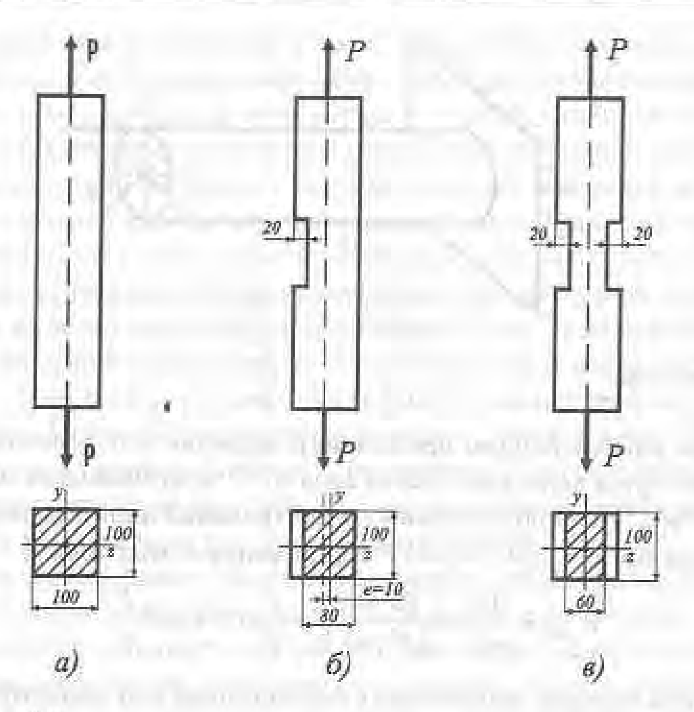


Рис. 10.9.

Напряжения при этом равны

$$\sigma = \frac{P}{F_1} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{P}{F_1} + \frac{P \cdot e}{W_y} = \frac{10^6}{0{,}1 \cdot 0{,}08} + \frac{10^6 \cdot 0{,}01}{0{,}1 \cdot 0{,}08^3/6} = 218 \text{ МПа}.$$

Таким образом, напряжения возрастают более чем в два раза. Если такую же галтель вырезать с противоположной стороны бруса (рис. 10.9, в), то будет иметь место центральное растяжение. С учетом уменьшения площади сечения, имеем

$$\sigma = \frac{P}{F_2} = \frac{10^6}{0{,}1 \cdot 0{,}06} = 167 \text{ МПа}.$$

10.3. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

В конструкциях часто встречаются стержни круглого и некруглого сечений, подвергающиеся одновременному действию крутящих и изгибающих моментов.

К ним относятся валы машин и механизмов (на них действуют давление зубчатых колес или натяжение ремней, собственный вес вала и т.д.), элементы авиационных конструкций (аэродинамические нагрузки действуют, например, на крыло и оперение самолета).

Для расчета бруса в первую очередь необходимо установить опасные сечения. Для этого должны быть построены эпюры изгибающих и крутящих моментов.

Рассмотрим **брус круглого поперечного сечения**, нагруженный внешними изгибающими и крутящим моментами (рис. 10.10). Произвольное поперечное сечение бруса представлено на рис. 10.11 со стороны внешней нормали к сечению.

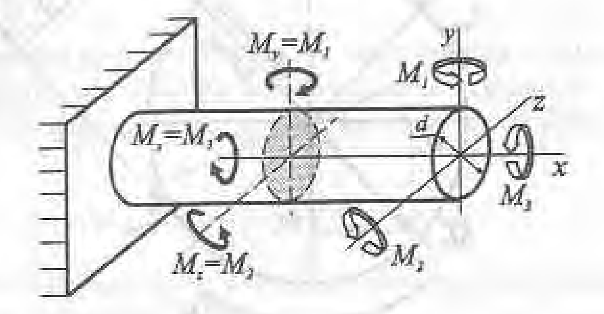


Рис. 10.10.

Применяя векторное изображение изгибающих моментов M_y и M_z, найдем вектор результирующего момента

$$M_R = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$

Положение силовой линии определяется перпендикуляром к указанному направлению вектора $\overline{M_R}$. Опасными являются точки пересечения контура сечения вала с силовой линией, в которых одновременно и нормальные напряжения от изгиба и касательные напряжения от кручения имеют наибольшие значения:

$$\sigma_{max} = \frac{M_R}{W_{oc}} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{\pi d^3/32}, \qquad (10.19)$$



$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{M_x}{\pi d^3/16}. \qquad (10.20)$$

На рис. 10.11 с учетом положения силовой линии построена эпюра нормальных напряжений и показано распределение касательных напряжений.

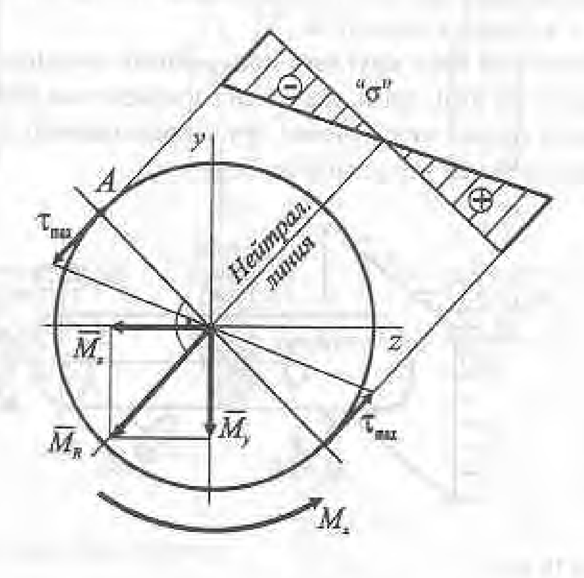


Рис. 10.11.

Выделим в окрестности опасной точки *A* бесконечно малый элемент кубической формы. По четырем граням выделенного элемента действуют касательные напряжения, а к двум из этих четырех граней приложены еще и нормальные напряжения (рис. 10.12). Остальные две грани свободны от напряжений. Таким образом, в отличие от косого изгиба, при изгибе с кручением элемент в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии. Аналогичные напряжения на гранях элемента имели место в изгибаемом брусе, формулы (8.23) и (8.24). Поэтому главные напряжения равны

$$s_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\ ;\ s_2 = 0. \qquad (10.21)$$

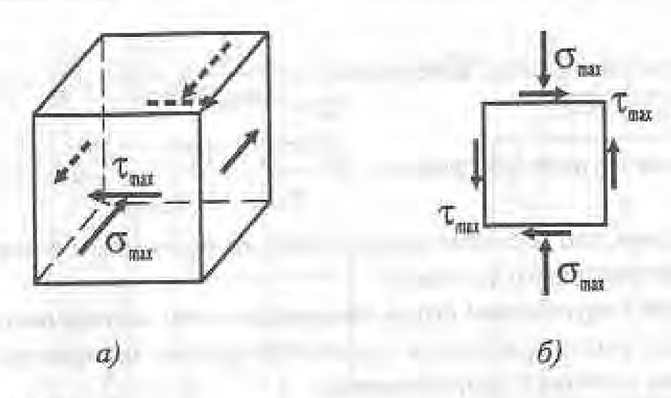


Рис. 10.12.

Для проверки прочности элемента, выделенного в окрестности опасной точки, необходимо выбрать соответствующую теорию прочности. Например, по теории наибольших касательных напряжений:

$$(\sigma_{экв})_{III} = s_1 - s_3 = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2}, \qquad (10.22)$$

или с учетом формул (10.19) и (10.20), и того, что для вала круглого и кольцевого сечения $W_p = 2W_{oc}$, получим:

$$(\sigma_{экв})_{III} = \frac{M_{эквIII}}{W_{oc}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\pi d^3/32}. \qquad (10.23)$$

По IV теории прочности:

$$(\sigma_{экв})_{III} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} \qquad (10.24)$$

или

$$(\sigma_{экв})_{III} = \frac{M_{эквIV}}{W_{oc}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{\pi d^3/32}, \qquad (10.25)$$

По теории прочности Мора

$$(\sigma_{экв})_{V} = \frac{1-k}{2}\sigma_{max} + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2}, \qquad (10.26)$$

где коэффициент *k* определяется по формулам (9.15) и (9.16):

— для пластичных материалов $k = \dfrac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tсж}} \approx \dfrac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$,

— для хрупких материалов $k = \dfrac{\sigma_{Bp}}{\sigma_{Bсж}} \approx \dfrac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$.

Заметим, что все приведенные формулы применимы и для расчета валов кольцевого сечения.

Изгиб с кручением бруса прямоугольного поперечного сечения будет рассматриваться в следующем разделе на примере общего случая сложного сопротивления.

10.4. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В качестве примера возьмем брус прямоугольного поперечного сечения, нагруженный внешними изгибающими моментами M_2 и M_3, крутящим моментом M_1 и силой P, создающими в произвольном поперечном сечении, отстоящим на расстояние x от правого конца бруса, изгибающие моменты M_y и M_z, крутящий момент M_x и продольную силу $N = P$ (рис. 10.13). Поперечные силы обычно бывают большими только в коротком брусе, и, как правило, в остальных случаях влиянием касательных напряжений от поперечных сил можно пренебречь. Эпюры нормальных и касательных напряжений в данном сечении (рис. 10.14, 10.15) показывают, что в отличие от круглого сечения наибольшие нормальные напряжения и наибольшие касательные напряжения не совпадают в одной и той же точке.

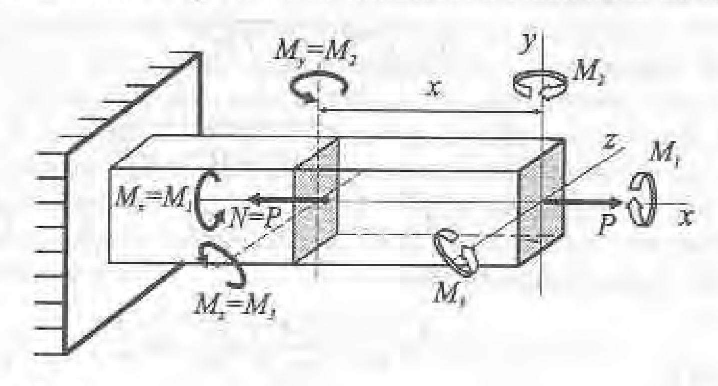


Рис. 10.13.

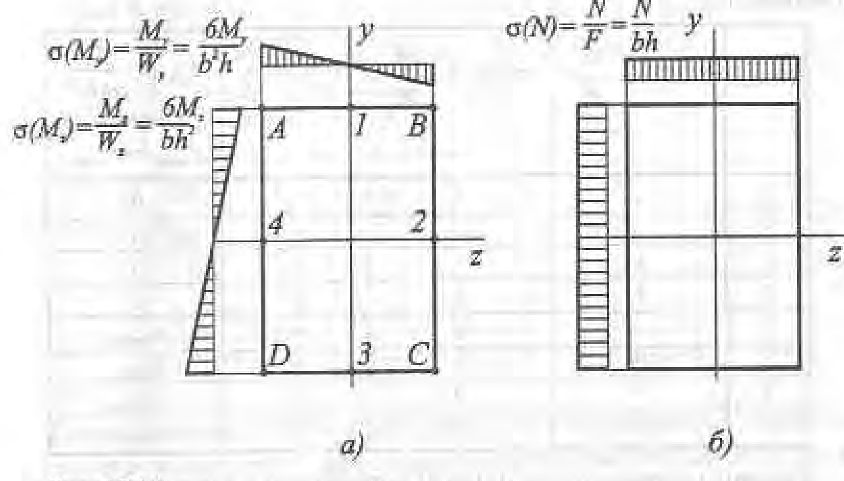


Рис. 10.14.

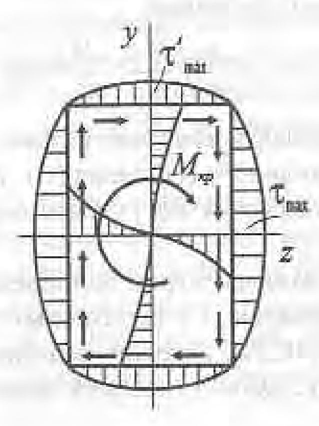


Рис. 10.15.

Следовательно, для определения самой опасной точки в сечении необходимо сопоставить эквивалентные напряжения в нескольких опасных точках. Обычно достаточно рассмотреть три точки сечения (рис. 10.14, а): одну угловую точку, в которой нормальные напряжения суммируются с одним знаком (точка D), одну точку посредине длинной стороны прямоугольника (точка 4) и одну точку посредине короткой стороны прямоугольника (точка 3). Напряжения в этих точках представлены в таблице 10.1.

Таблица 10.1.

Точки	$\sigma(M_z)=\dfrac{M_z}{W_z}$	$\sigma(M_y)=\dfrac{M_y}{W_y}$	$\sigma(N)=\dfrac{N}{F}$	$\tau_{max}=\dfrac{M_x}{\alpha hb^2}$ или $\tau'_{max}=\gamma\tau_{max}$
A	–	+	+	0
B	–	–	+	0
C	+	–	+	0
D	+	+	+	0
1	–	0	+	τ'_{max}
2	0	-	+	τ_{max}
3	+	0	+	τ'_{max}
4	0	+	+	τ_{max}

Условие прочности для точки D записывается как для случая линейного напряженного состояния:

$$\sigma_D=\frac{N}{F}+\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}\le[\sigma]. \tag{10.27}$$

Элемент, выделенный в окрестности точек 3, 4 находится в условиях плоского напряженного состояния (см. табл. 10.1), и, следовательно, главные напряжения могут быть вычислены по формуле (10.21).

Для вычисления эквивалентных напряжений в точках 3, 4 подставим значения нормальных и касательных напряжений в формулы (10.22), (10.24), (10.26). Получим значения эквивалентных напряжений по соответствующим теориям прочности:

— для точки 3

$$\begin{cases}(\sigma_{экв})_{III}=\sqrt{\left(\dfrac{M_z}{W_z}+\dfrac{N}{F}\right)^2+4\left(\gamma\dfrac{M_x}{\alpha\cdot h\cdot b^2}\right)^2}\,;\\[2ex] (\sigma_{экв})_{IV}=\sqrt{\left(\dfrac{M_z}{W_z}+\dfrac{N}{F}\right)^2+3\left(\gamma\dfrac{M_x}{\alpha\cdot h\cdot b^2}\right)^2}\,;\\[2ex] (\sigma_{экв})_{V}=\dfrac{1-k}{2}\cdot\left(\dfrac{M_z}{W_z}+\dfrac{N}{F}\right)+\dfrac{1+k}{2}\sqrt{\left(\dfrac{M_z}{W_z}+\dfrac{N}{F}\right)^2+4\left(\gamma\dfrac{M_x}{\alpha\cdot h\cdot b^2}\right)^2}\end{cases} \tag{10.28}$$

Глава 10. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

— для точки 4

$$\begin{cases}(\sigma_{экв})_{III}=\sqrt{\left(\dfrac{M_y}{W_y}+\dfrac{N}{F}\right)^2+4\left(\dfrac{M_x}{\alpha\cdot h\cdot b^2}\right)^2}\,;\\[2ex] (\sigma_{экв})_{IV}=\sqrt{\left(\dfrac{M_z}{W_y}+\dfrac{N}{F}\right)^2+3\left(\dfrac{M_x}{\alpha\cdot h\cdot b^2}\right)^2}\,;\\[2ex] (\sigma_{экв})_{V}=\dfrac{1-k}{2}\cdot\left(\dfrac{M_y}{W_y}+\dfrac{N}{F}\right)+\dfrac{1+k}{2}\sqrt{\left(\dfrac{M_y}{W_y}+\dfrac{N}{F}\right)^2+4\left(\dfrac{M_x}{\alpha\cdot h\cdot b^2}\right)^2}\end{cases} \tag{10.29}$$

Таким образом, наиболее опасная точка определяется только в результате вычисления эквивалентных напряжений во всех трех точках, причем в каждом случае положение наиболее опасной точки зависит от конкретного соотношения величин моментов.

Напряжения **при изгибе с кручением** бруса прямоугольного сечения легко определить путем исключения нормальных напряжений от растяжения или сжатия N/F из уравнений (10.27), (10.28), (10.29).

Положение опасной точки и напряжений в общем случае сложного сопротивления (т.е. при наличии двух изгибающих моментов, крутящего момента и продольной силы) для **бруса круглого поперечного сечения** определяются, как это описано в разделе 10.4, по формулам (10.22), (10.24), (10.26), с той лишь разницей, что в уравнение (10.19) для σ_{max} добавляется напряжения от растяжения или сжатия:

$$\sigma_{max}=\frac{M_R}{W_{oc}}+\frac{N}{F}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2}}{\pi\cdot d^3/32}+\frac{N}{F}. \tag{10.30}$$

Глава 11. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БРУСЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

При нагружении бруса в его поперечных сечениях могут возникать одновременно шесть внутренних силовых факторов: нормальная сила N, перерезывающие силы Q_y и Q_z, крутящий момент M_x и изгибающие моменты M_y и M_z.

Если при определении внутренних силовых факторов в качестве осей y, z выбрать главные центральные оси сечения, то напряжения в сечении бруса малой кривизны можно вычислить по формулам

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y, \qquad (11.1)$$

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^{отс}}{I_z b(y)}; \ \tau_{zx} = \frac{Q_z S_y^{отс}}{I_y b(z)}, \qquad (11.2)$$

$$\tau = \frac{QS}{I\delta}; \ \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_{кр}}. \qquad (11.3)$$

Перемещение центра тяжести сечения C, или, иначе, перемещение точки C оси бруса вычисляется при изгибе на основании интеграла Мора по формуле (8.43). Вывод интеграла Мора, приведенный в разделе 8.11 можно легко распространить и на случай растяжения (сжатия), кручения и т.д. Таким образом, перемещение сечения бруса в общем случае определяется уравнением

$$\delta_{CP} = \int_l \frac{M_y(s) M_y^1(s)}{EI_y} ds + \int_l \frac{M_z(s) M_z^1(s)}{EI_z} ds + \int_l \frac{M_x(s) M_x^1(s)}{GI_{кр}} ds + \int_l \frac{N(s) N^1(s)}{EF} ds + K_y \int_l \frac{Q_y(s) Q_y^1(s)}{GF} ds + K_z \int_l \frac{Q_z(s) Q_z^1(s)}{GF} ds, \qquad (11.4)$$

где безразмерные коэффициенты K_y, K_z (см. раздел 8.7) учитывают неравномерность распределения касательных напряжений при изгибе бруса.

Уравнение (11.4) называется *интегралом Мора для пространственного бруса малой кривизны*. В это равенство входят внутренние силовые факторы в текущем сечении бруса, вычисленные относительно главных центральных осей инерции сечения. Произведение силового фактора от заданной нагрузки на соответствующий силовой фактор от единичной нагрузки считается положительным, если эти факторы совпадают по направлению.

Формула (11.4) позволяет вычислить только проекцию полного перемещения сечения бруса на заданное направление. Для определения полного перемещения δ вычисляют проекции этого перемещения на три взаимно перпендикулярных направления (направления главных центральных осей y, z и касательной к оси x бруса), а затем находится δ:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2}. \qquad (11.5)$$

Относительные величины слагаемых в правой части формулы (11.4) неравноценны и их соотношение зависит от типа конструкции. Например, для подавляющего большинства рам влияние на их деформации поперечных и нормальных сил существенно меньше влияния изгибающих и крутящих моментов. Поэтому при определении перемещений сечений рам тремя последними слагаемыми формулы (11.4) обычно пренебрегают.

Интеграл Мора для плоских рам имеет тот же вид, как и для балок:

$$\delta_{CP} = \sum_1^n \int_l \frac{M_z(s) M_z^1(s)}{EI_z} ds. \qquad (11.6)$$

На прямолинейных участках данный интеграл удобно вычислять перемножением эпюр способом Верещагина (раздел 8.12) или методом «дирижера» (раздел 8.13).

Пример 11.1. Определить горизонтальное перемещение опоры B (рис. 11.1).

Изгибающий момент от силы P в текущем сечении

$$M_z(\varphi) = \frac{P}{2}(R - R\cos\varphi).$$

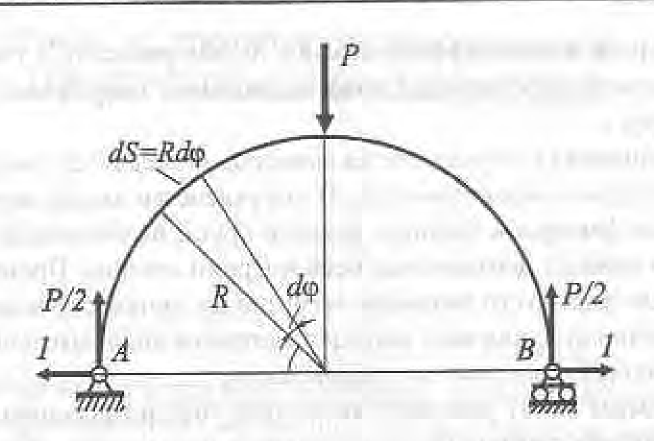


Рис. 11.1.

Снимем силу P и приложим в опоре B горизонтальную единичную силу. Тогда изгибающий момент будет

$$M_z^1(\varphi) = 1R\sin\varphi.$$

Согласно уравнению (11.6) и равенству $ds = Rd\varphi$, получим

$$\delta_B^{верт} = \frac{2}{EI_z}\int_0^{\pi/2}\frac{P}{2}(R - R\cos\varphi)R\sin\varphi\, R\, d\varphi = \frac{PR^3}{2EI_z}.$$

Пример 11.2. Определить угол поворота опоры B (рис. 11.2).

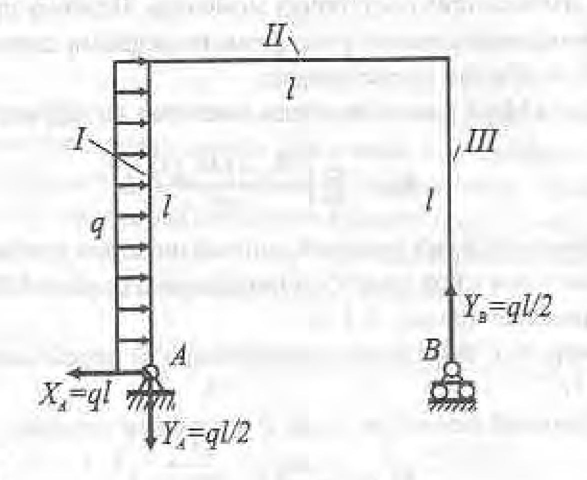


Рис. 11.2.

Изгибающие моменты от внешней нагрузки:

— на участке 1 — $M_z(y) = \frac{ql}{2}y - \frac{qy^2}{2}$,

— на участке 2 — $M_z(x) = \frac{ql^2}{2} - \frac{qlx}{2}$,

— на участке 3 — $M_z(y) = 0$.

Снимем распределенную нагрузку и приложим в опоре B изгибающий единичный момент (рис. 11.3).

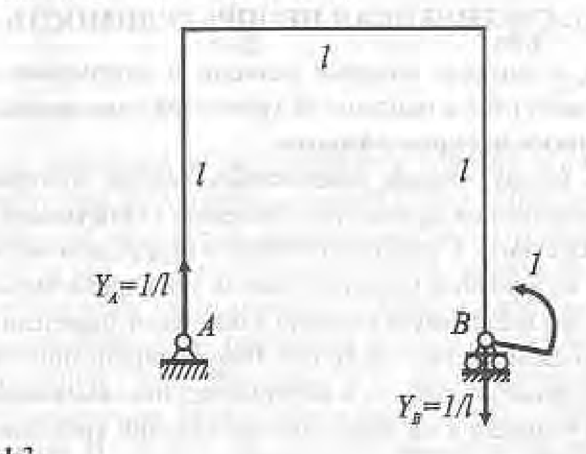


Рис. 11.3.

Изгибающие моменты от единичного момента будут равны:

— на участке 1 — $M_z(y) = 0$,

— на участке 2 — $M_z(x) = \frac{1x}{l}$,

— на участке 3 — $M_z(y) = 1$.

Согласно формуле (11.6)

$$\theta_B = \frac{1}{EI_z}\int_0^l \frac{1}{l}x\left(\frac{ql^2}{2} - \frac{qlx}{2}\right)dx = \frac{ql^3}{12EI_z}.$$

Глава 12. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

12.1. СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Системы, в которых опорные реакции и внутренние силовые факторы не могут быть найдены из уравнений равновесия, называются **статически неопределимыми**.

Разность между числом неизвестных усилий и независимых уравнений равновесия называется **степенью статической неопределимости системы.** Степень статической неопределимости всегда равна числу избыточных (лишних) связей, удаление которых делает статически неопределимую систему статически определимой геометрически неизменяемой системой. Избыточными могут быть как внешние (опорные) связи, так и внутренние, накладывающие определенные ограничения на перемещение сечений системы относительно друг друга.

Геометрически неизменяемой системой называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Геометрически изменяемой системой называется такая система, элементы которой могут перемещаться под действием внешних сил без деформации (механизм).

Изображенная на рис. 12.1 рама имеет шесть внешних связей. Для определения опорных реакций можно составить три независимых уравнения равновесия, т.е. данная система три раза статически неопределима. Таким образом, степень статической неопределимости для плоских рам

$$n_1 = R - 3, \qquad (12.1)$$

где R — число опорных реакций.

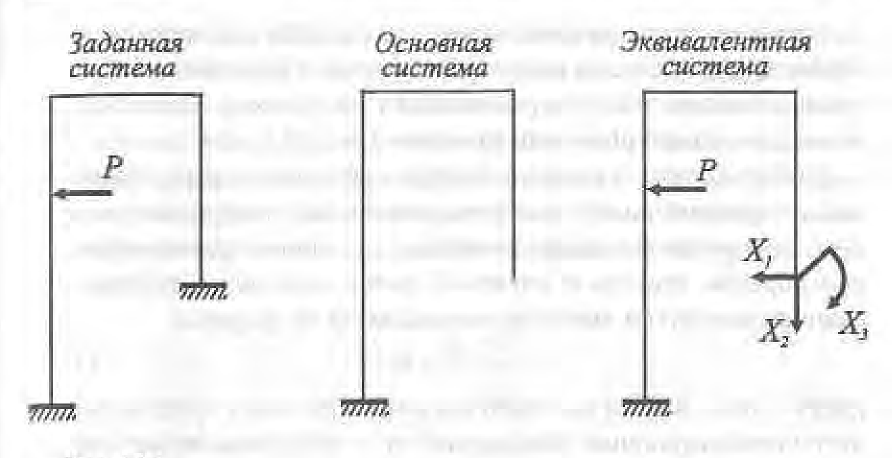


Рис. 12.1.

Контур, состоящий из ряда элементов (прямых или криволинейных), жестко (без шарниров) связанных между собой и образующих замкнутую цепь, называется **замкнутым.** Прямоугольная рама, изображенная на рис. 12.2, представляет собой замкнутый контур. Она трижды статически неопределима, и чтобы сделать ее статически определимой необходимо перерезать один из ее элементов и устранить три лишние связи. Реакциями этих связей являются: продольная сила, поперечная сила и изгибающий момент, действующие в месте разреза. Их нельзя определить с помощью уравнений статики. Это относится к любому замкнутому контуру, который **трижды статически неопределим.**

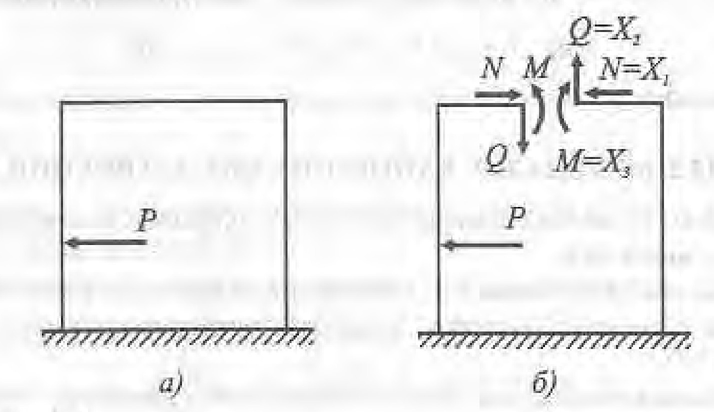


Рис. 12.2.

Установка шарнира в узел рамы, где сходятся два стержня, или в любом другом месте на оси стержня, снимает одну связь и снижает степень статической неопределимости на единицу. Такой шарнир называется **одиночным или простым** (рис. 12.3, а).

В общем случае каждый шарнир, включенный в узел, соединяющий c стержней, снижает степень статической неопределимости на $c - 1$, так как такой шарнир заменяет $c - 1$ одиночных шарниров. Таким образом, степень статической неопределимости системы при наличии замкнутых контуров определяется по формуле

$$n_2 = 3k - m, \qquad (12.2)$$

где k — число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений; m — число одиночных шарниров, шарнир, соединяющий два стержня, считается за один, соединяющий три стержня — за два (двойной шарнир) и т.д.

Суммарная степень статической неопределимости системы равна

$$n = n_1 + n_2. \qquad (12.3)$$

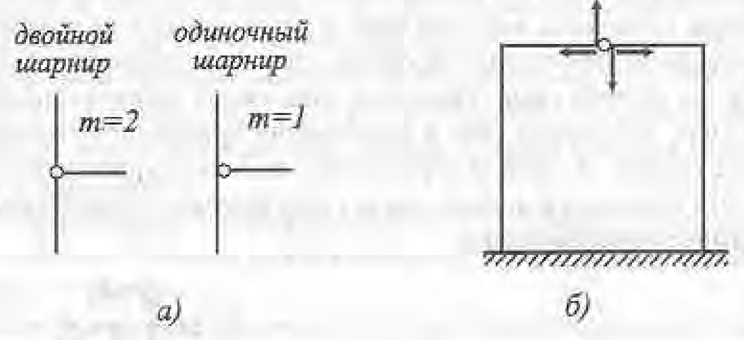


Рис. 12.3.

12.2. МЕТОД СИЛ. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Одним из методов раскрытия статической неопределимости является **метод сил**.

Система, полученная из заданной путем удаления избыточных связей и внешней нагрузки, называется **основной системой** (см. рис. 12.1).

Удалим в плоской раме лишние опорные связи, например, в правой заделке и заменим действие этих связей силами X_1, X_2 и моментом X_3.

Полученную таким образом статически определимую систему называют **эквивалентной**, так как напряжения и перемещения сечений в этой системе такие же, как и в заданной статически неопределимой.

Величины неизвестных силовых факторов X_1, X_2, X_3 находят из условия, что равны нулю перемещения опорных сечений по направлению удаленных связей. Эти перемещения вызываются в эквивалентной системе совместным действием внешней нагрузки и усилий X_1, X_2, X_3:

$$\begin{cases} \delta_{1(P,X_1,X_2,X_3)} = 0; \\ \delta_{2(P,X_1,X_2,X_3)} = 0; \\ \delta_{3(P,X_1,X_2,X_3)} = 0. \end{cases} \qquad (12.4)$$

Индексы 1, 2, 3 обозначают перемещения опорных сечений по направлениям неизвестных силовых факторов.

При соблюдении условий системы уравнений (12.4) напряжения и деформации в эквивалентной системе будут равны напряжениям и деформациям в заданной статически неопределимой системе.

Задача расчета статически неопределимой системы сводится к расчету статически определимой эквивалентной системы, нагруженной заданной внешней нагрузкой и неизвестными усилиями X_1, X_2, X_3.

В соответствии с принципом независимости действия сил перемещение сечения от воздействия ряда нагрузок равно сумме перемещений от каждой нагрузки в отдельности. Поэтому каждое из уравнений системы (12.4) можно представить как

$$\delta_{i(P,X_1,X_2,X_3)} = \delta_{iP} + \delta_{iX_1} + \delta_{iX_2} + \delta_{iX_3} = 0. \qquad (12.5)$$

Перемещение δ_{iX_k} от усилия X_k пропорционально величине этого усилия:

$\delta_{iX_k} = \delta_{ik} X_k$,

где δ_{ik} — перемещение от единичного усилия (1 Н, 1 Н·м и т. д.), приложенного вместо X_k.

Окончательно система уравнений (12.4) запишется так:

$$\begin{cases} \delta_{1P} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0; \\ \delta_{2P} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0; \\ \delta_{3P} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0. \end{cases} \qquad (12.6)$$

Число уравнений в системе уравнений (12.6) всегда будет равно степени статической неопределимости задачи. Уравнения (12.6) называются **каноническими уравнениями метода сил.**

Коэффициентами канонических уравнений являются перемещения определенных сечений эквивалентной системы в известных направлениях от данной нагрузки. Например, δ_{1P} есть перемещение точки приложения силы X_1 в направлении этой силы от одной только внешней нагрузки, δ_{11} — перемещение той же точки и в том же направлении, но от одной единичной силы, приложенной вместо X_1, δ_{12} — перемещение от единичной силы, приложенной вместо X_2.

Уравнения (12.6) были получены на примере системы, у которой избыточными являлись внешние (опорные) связи. Такие системы называют внешне статически неопределимыми.

В системе, где избыточными являются внутренние связи (рис. 12.2) выполняется разрез замкнутого плоского контура, который убирает три внутренние связи, препятствующие относительным перемещениям сечений в этом месте по направлению сил и повороту их относительно друг друга в направлении момента.

Так как в действительности разрез отсутствует, относительные перемещения двух смежных сечений эквивалентной системы, вызванные совместным действием заданной нагрузки и внутренних силовых факторов должны быть равны нулю. Канонические уравнения метода сил для внутренне статически неопределимых систем отличаются от уравнений для внешне статически неопределимых систем только тем, что коэффициенты уравнений (12.6) представляют собой не абсолютные, а относительные перемещения двух смежных сечений в месте разреза.

Одну и ту же систему можно рассматривать как внешне статически неопределимую, если удалить опорные связи, или как внутренне статически неопределимую, если удалить внутренние связи.

Коэффициенты канонических уравнений вычисляются с помощью интеграла Мора (8.43) или с помощью правила Верещагина.

Вначале строятся эпюры внутренних силовых факторов отдельно от заданной нагрузки и единичных усилий, приложенных вместо искомых усилий X_i. Эпюры от заданных нагрузок называются основными, а от единичных — единичными.

Для определения коэффициентов канонических уравнений вычисляют интегралы Мора от произведения ранее найденных внутренних силовых факторов с номерами, соответствующими индексам этих коэффициентов, или перемножают по правилу Верещагина соответствующие эпюры.

Коэффициенты δ_{ii} всегда отличны от нуля и положительны, а коэффициенты δ_{ik} и δ_{iP} могут быть положительными, отрицательными и равняться нулю.

Таким образом, статически неопределимые задачи решаются в следующей последовательности:

1. Определяется степень статической неопределимости системы как разность между числом искомых неизвестных усилий и числом независимых уравнений равновесия.

2. Устанавливается основная система путем удаления лишних связей и внешней нагрузки и эквивалентная система, в которой вместо лишних связей приложены силы X_i в том же направлении, если связи препятствовали линейному перемещению, и пары X_k, если они исключали повороты сечений.

3. Составляются канонические уравнения метода сил и вычисляются коэффициенты канонических уравнений.

4. Решается система канонических уравнений, и определяются величины искомых силовых факторов.

5. Строятся суммарные эпюры внутренних силовых факторов, ординаты которых находят алгебраическим суммированием ординат ранее построенных эпюр тех же факторов от заданных нагрузок и единичных эпюр, увеличенных в X_i раз.

Пример 12.1. Построить эпюру изгибающих моментов для плоской рамы, представленной на рис. 12.4, а.

Система дважды статически неопределима. На рис. 12.4, б, в, г показаны три варианта эквивалентных систем. Наиболее простым является первый вариант.

Канонические уравнения метода сил имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{1P} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0; \\ \delta_{2P} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0. \end{cases}$$

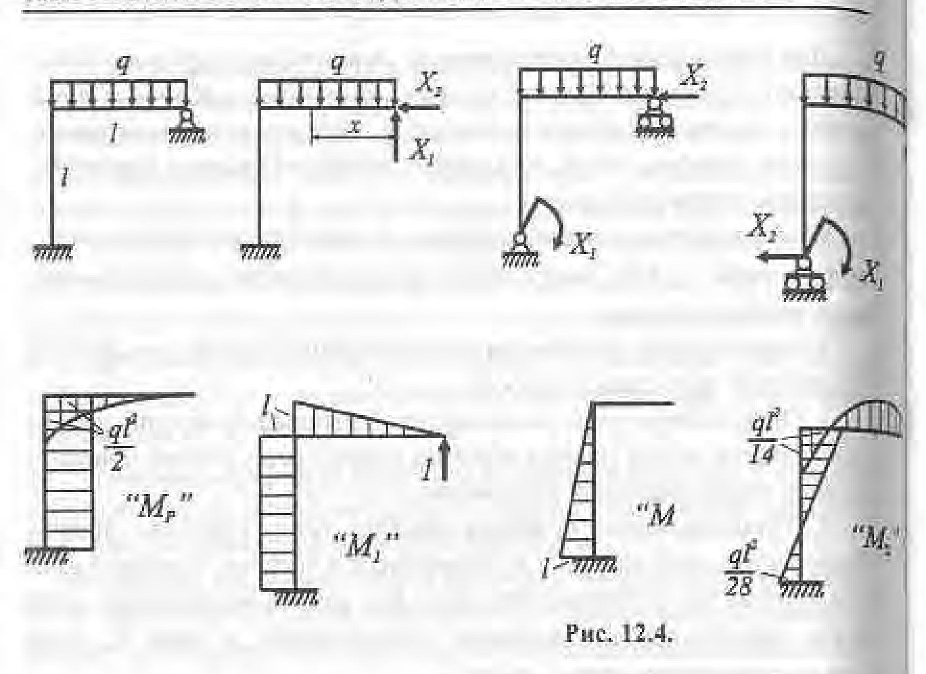


Рис. 12.4.

Эпюры изгибающих моментов от распределенной нагрузки и единичных сил представлены на рис. 12.4, д-ж. Коэффициенты канонических уравнений вычисляются методом Верещагина:

$$\delta_{1P} = -\frac{5}{8}\frac{ql^4}{EI_z},\ \delta_{2P} = -\frac{1}{4}\frac{ql^4}{EI_z},\ \delta_{11} = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EI_z},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EI_z},\ \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2}\frac{l^3}{EI_z}.$$

Подставляя значения коэффициентов в канонические уравнения и решая их, получим $X_1 = 3ql/7$, $X_2 = 3ql/28$.

Суммарная эпюра изгибающих моментов M_Σ представлена на рис.12.4, з.

12.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Для определения перемещений в статически неопределимых системах необходимо раскрыть статическую неопределимость и построить суммарные эпюры внутренних силовых факторов.

Перемещения определяются не в заданной, а в эквивалентной системе. Для этого перемножаются суммарные эпюры внутренних силовых факторов и эпюры от единичных нагрузок, приложенных в сечениях, перемещения которых определяются.

Так, например, нетрудно установить, что суммарная эпюра в примере 12.1 построена правильно, так как произведение этой эпюры на первую единичную (вертикальное перемещение правой опоры) равно нулю:

$$\delta_{1\Sigma} = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^l\left(\frac{3}{7}qlx - qx^2/2\right)x\,dx - \frac{1}{2}\frac{ql^2}{14}\frac{2l}{3}l + \frac{1}{2}\frac{ql^2}{28}\frac{l}{3}l\right] = 0.$$

12.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЗАДАЧ

Внутренние силовые факторы в сечении бруса можно разделить на симметричные и обратно симметричные. К симметричным силовым факторам относятся изгибающие моменты и нормальные силы, так как в двух смежных сечениях бруса они симметричны относительно плоскости разреза (рис. 12.2). К обратно симметричным (кососимметричным) внутренним силовым факторам относятся поперечные силы, так как они обратно симметричны относительно плоскости разреза.

Симметричная стержневая система с нагрузкой симметричной относительно плоскости симметрии, называется симметричной.

Симметричная стержневая система с нагрузкой обратно симметричной относительно плоскости симметрии, называет обратно симметричной.

Если разрезать симметричную систему в плоскости симметрии, то нетрудно заметить, что обратно симметричные внутренние силовые факторы в этом сечении должны быть равны нулю, так как обратно симметричные силовые факторы будут вызывать обратно симметричные деформации, которые не соответствуют реальному характеру деформаций симметричной системы.

Таким образом, **в симметричной системе, нагруженной симметричной внешней нагрузкой обратно симметричные внутренние силовые факторы в плоскости симметрии (крутящий момент и поперечные силы) равны нулю.**

Аналогично, в **симметричной системе, нагруженной обратно симметричной внешней нагрузкой симметричные внутренние силовые факторы в плоскости симметрии (изгибающие моменты и продольная сила) равны нулю.**

Основную систему в симметричных конструкциях надо выбирать путем удаления лишних связей в плоскости симметрии. При этом эквивалентная система также должна быть симметричной (только при этом условии реализуются описанные выше свойства симметрии).

Глава 13. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

13.1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Для надежной работы элементов конструкций необходимо обеспечить сохранение первоначальной формы равновесия, как самих элементов, так и всей конструкции в целом.

Равновесие механической системы называется **устойчивым**, если при отклонении от положения равновесия система возвращается в первоначальное положение после устранения причин, вызывающих это отклонение.

Равновесие называется **неустойчивым**, если система не возвращается в исходное положение, а отклоняется от него еще больше.

Равновесие называется **безразличным**, если новое положение системы после отклонения от исходного остается равновесным и после удаления внешнего воздействия.

Прямолинейная форма равновесия длинного стержня, подвергнутого осевому сжатию силой P (рис. 13.1), устойчива только до определенного значения сжимающей силы. Если такой стержень при малых значениях силы P отклонить от исходного положения, то при устранении причин, вызывающих это отклонение, он снова примет первоначальную прямолинейную форму.

При некотором значении силы P, называемом **критическим**, стержень не распрямится, а сохранит ту форму, которую ему придали при малом отклонении. При значении силы P, равном критическому ($P = P_k$), стержень будет находиться в условиях безразличного равновесия.

Если сила P превысит критическое значение, прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой.

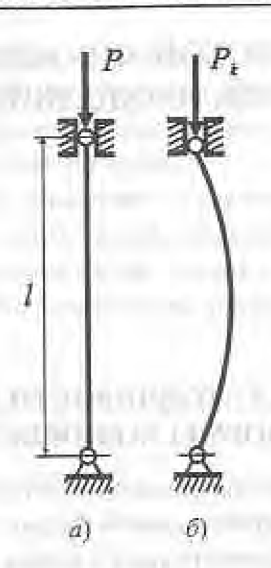


Рис. 13.1.

Явление изгиба стержня продольной силой называется **продольным изгибом**.

Допускаемую нагрузку при расчете на устойчивость определяют как часть критической:

$$P_{доп} = \frac{P_k}{n_y}, \qquad (13.1)$$

где n_y — коэффициент запаса устойчивости.

Величина коэффициента запаса устойчивости принимается примерно равной запасу прочности. Например, для стали $n_y = 2\ldots4$ в зависимости от условий работы конструкции. Для неоднородных материалов запас устойчивости увеличивают.

13.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Предположим, что шарнирно закрепленный по концам прямой стержень, сжатый силой $P = P_k$, выведен некоторой горизонтальной силой из состояния прямолинейного равновесия и остался изогнутым после устранения горизонтальной силы (рис. 13.2). Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид:

$$EIy'' = \pm M_{изг}(x). \qquad (13.2)$$

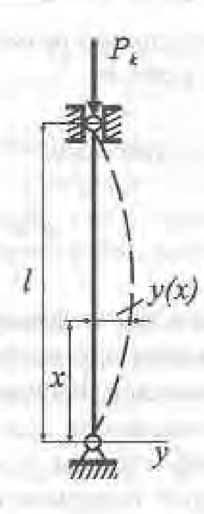


Рис. 13.2.

В соответствии с правилом знаков для изгибающего момента:

$$M_{изг}(x) = P_k y(x) > 0.$$

Так как в выбранной системе координат кривизна оси является отрицательной ($y''<0$), в правой части уравнения (13.2) следует поставить знак минус:

$$EIy'' = -P_k y.$$

Приняв $P_k/EI = \alpha^2$, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \qquad (13.3)$$

общий интеграл которого

$$y(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x.$$

Здесь A и B — постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления стержня, так называемых граничных или краевых условий.

Горизонтальное смещение нижнего конца стержня равно нулю, т. е. при $x = 0$ прогиб $y = 0$. Это условие выполняется, если B = 0. Следовательно, изогнутая ось стержня является синусоидой:

$$y(x) = A\sin\alpha x. \qquad (13.4)$$

Горизонтальное смещение верхнего конца стержня также равно нулю, поэтому $y(l) = A\sin\alpha l = 0$.

При $A = 0$ возможна только прямолинейная форма равновесия. Поэтому $\sin\alpha l = 0$ или $\alpha l = \pi n$.

Приравняв $\alpha l = \pi n$ и подставив $\alpha = \sqrt{\dfrac{P_k}{EI}}$, получим

$$P_k = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}. \tag{13.5}$$

Уравнение (13.5) называется **формулой Эйлера**.

P_k — критическая сила при выпучивании стержня в одной из двух главных его плоскостей. Выпучивание стержня происходит в сторону наименьшей жесткости, если нет специальных устройств, препятствующих изгибу стержня в этом направлении. Поэтому в формулу Эйлера следует подставлять меньший из главных центральных моментов инерции поперечного сечения стержня I_{min}.

Величина критической силы, зависит от коэффициента n. Найдем смысл этого коэффициента.

Уравнение (13.4) можно записать как

$$y(x) = A\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{13.6}$$

Синусоиды для $n = 1$ и $n = 2$ изображены на рис. 13.3, т.е. величина n представляет собой число полуволн синусоиды, по которой изогнется стержень. Очевидно, стержень всегда изогнется по наименьшему числу полуволн, допускаемому его опорными устройствами, так как по формуле (13.5) наименьшему n соответствует наименьшая критическая сила.

Формула (13.5) справедлива не только для стержня с шарнирно закрепленными концами, но и для любого стержня, который изогнется при выпучивании по целому числу полуволн.

Формулу Эйлера можно обобщить на случай любых опорных устройств, если записать как

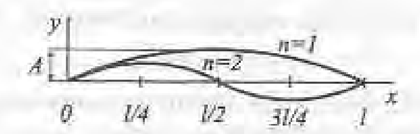


Рис. 13.3.

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}, \tag{13.7}$$

где $\mu = 1/n$ — величина постоянная, обратная числу полуволн n синусоиды, по которой изогнется стержень. Постоянная μ называется коэффициент приведения длины, а μl — приведенная длина стержня, которая является длиной полуволны синусоиды, по которой изгибается стержень.

Случай шарнирного закрепления концов стержня является основным. Значения коэффициента приведения μ для некоторых случаев закрепления стержня приведены на рис. 13.4.

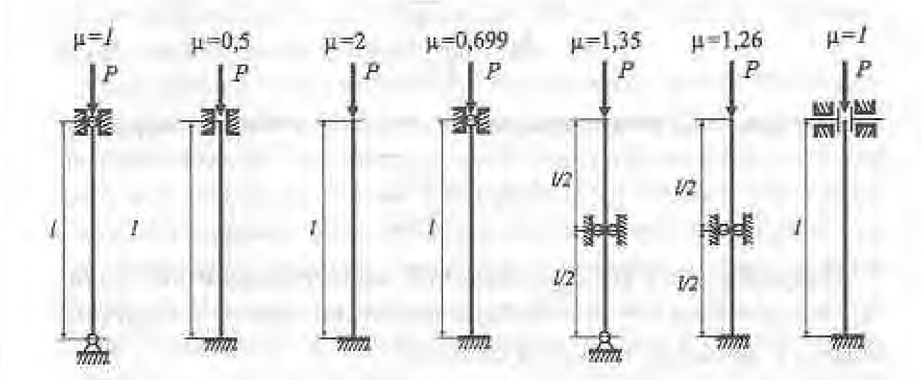


Рис. 13.4.

13.3. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Формула Эйлера основана на дифференциальном уравнении упругой линии балки, которое справедливо только в пределах упругих деформаций. Следовательно, критические напряжения, определяемые по этой формуле, не должны превосходить предела пропорциональности $\sigma_{пц}$:

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2 F} \le \sigma_{пц}.$$

Используя соотношение $i^2_{min} = I_{min}/F$, где I_{min} —наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня, можем записать следующее

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} \le \sigma_{пц} \quad \text{или} \quad \sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}. \tag{13.8}$$

Безразмерная величина λ называется *гибкостью стержня* и равна

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \tag{13.9}$$

Гибкость зависит от длины стержня, геометрических параметров поперечных сечений, условия его закрепления и вида нагружения.

Обозначим значение гибкости стержня, при котором $\sigma_k = \sigma_{пц}$, λ_0. Тогда,

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \tag{13.10}$$

Формула Эйлера применима для стержней, гибкость которых

$$\lambda \ge \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}.$$

Например, для конструкционной малоуглеродистой стали с $\sigma_{пц} = 210$ МПа и $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа формулой Эйлера можно пользоваться лишь при гибкости стержня

$$\lambda \ge \lambda_0 = 3{,}14 \sqrt{\frac{2{,}1 \cdot 10^5}{210}} \approx 100,$$

а для алюминиевого сплава Д16Т с $\sigma_{пц} = 200$ МПа и $E = 0{,}75 \cdot 10^5$ МПа при

$$\lambda \ge \lambda_0 = 3{,}14 \sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 10^5}{200}} \approx 60.$$

13.4. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ. ПОЛНАЯ ДИАГРАММА КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Для стержней средней и малой гибкости формула Эйлера дает значения критических нагрузок, превышающие их действительные значения. Поэтому для практических расчетов на устойчивость при

$\lambda < \lambda_0$ часто пользуются либо непосредственно экспериментальными данными, либо эмпирическими формулами.

Наибольшее распространение имеет формула, предложенная Ф. С. Ясинским:

$$\sigma_k = a - b\lambda, \tag{13.11}$$

где λ — гибкость стержня, а a и b — коэффициенты, зависящие от свойств материала. Например, для Стали 3 при $\sigma_B = 380$ МПа и $\sigma_T = 240$ МПа формула (13.11) имеет вид

$$\sigma_k = 310 - 1{,}14\lambda.$$

По формуле (13.11) проводится расчет на устойчивость стержней средней гибкости, разрушение которых при сжатии сопровождается значительным боковым выпучиванием.

Для стержней малой гибкости ($\lambda < \lambda_1$) понятие потери устойчивости неприменимо в том смысле, в каком применяется для стержней большой гибкости. Стержни, у которых длина невелика относительно размеров поперечного сечения, выходят из строя главным образом из-за того, что напряжения сжатия в них достигают предела текучести σ_T (при пластичном материале) или предела прочности σ_B (при хрупком материале). Поэтому для стержней малой гибкости в качестве критического напряжения принимается предел текучести σ_T или предел прочности σ_B. Четкой границы между стержнями малой и средней гибкости провести нельзя. В расчетах принимают $\lambda_1 = (0{,}2\ldots0{,}4)\lambda_0$.

Зависимость критических напряжений σ_k от гибкости λ изображается графически в виде **полной диаграммы критических напряжений**. Такая диаграмма для стали представлена на рис. 13.5.

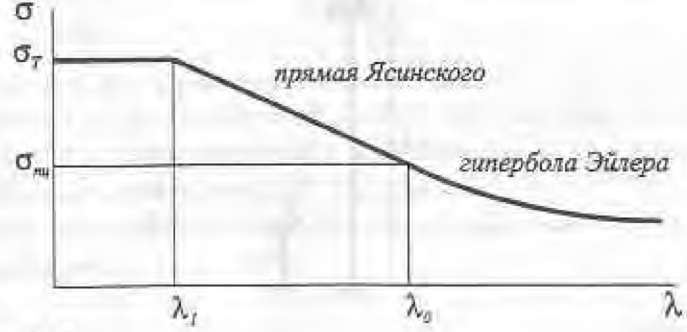


Рис. 13.5.

Для стержней малой гибкости зависимость σ_k от λ выражена горизонтальной прямой, для стержней средней гибкости — наклонной прямой, формула (13.11), а для стержней большой гибкости — гиперболой Эйлера.

Таким образом, при расчете на устойчивость прежде всего необходимо определить гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

Если $\lambda > \lambda_0$ [см. уравнение (13.10)], то формула Эйлера применима, и $P_{доп}$ можно найти из условия

$$P_{доп} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{n_y (\mu l)^2}. \quad (13.12)$$

Если $\lambda < \lambda_0$, то формула Эйлера не применима, и для определения $P_{доп}$ можно воспользоваться формулой (13.11).

Пример 13.1. Определить допускаемую нагрузку для стойки (рис. 13.6) двутаврового сечения №18 по сортаменту, если $l = 4$ м, $n_y = 2{,}5$.

Для двутаврового сечения № 18 площадь $F = 30.6$ см^2, $i_{\min} = i_y = 2$ см, $I_{\min} = I_y = 122$ см^4.

Для материала стоек $\lambda_0 = 100$. Гибкость $\lambda = \mu l / i_{\min} = 0{,}7 \cdot 400/2 = 140 > 100$.

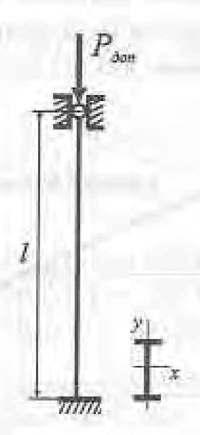


Рис. 13.6.

Поэтому для определения критической силы используем формулу Эйлера:

$$P_{доп} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{n_y (\mu l)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 122 \cdot 10^{-8}}{2{,}5(0{,}7 \cdot 4)^2} = 123 \text{ кН}.$$

13.5. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПОМОЩЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА СНИЖЕНИЯ ОСНОВНОГО ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ

При расчете на устойчивость широко используется следующая зависимость:

$$\sigma = \frac{P}{F} \le \varphi[\sigma], \quad (13.13)$$

где $[\sigma]$ — основное допускаемое напряжение на сжатие; φ — коэффициент снижения основного допускаемого напряжения (или коэффициент продольного изгиба); F — площадь поперечного сечения стержня.

Величина φ зависит от материала и гибкости стержня. Значения φ приведены в табл. 13.1.

Величина $\varphi[\sigma]$ рассматривается как допускаемое напряжение при расчете на устойчивость, т. е.

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma]. \quad (13.14)$$

Для подбора сечения неравенство (13.13) приводят к виду:

$$F \ge \frac{P}{\varphi[\sigma]}.$$

При этом значением φ приходится задаваться, так как гибкость λ неизвестна. В качестве первого приближения рекомендуется принимать $\varphi_1 = 0{,}5$. Затем определяют величины F, $I_{\min}$, $i_{\min}$, λ и по табл. 13.1 находят соответствующее значение φ_1'.

Расчет повторяется до тех пор, пока неравенство (13.13) не будет удовлетворено.

Таблица 13.1. *Значения коэффициента φ снижения основного допускаемого напряжения для некоторых материалов*

λ	Стали Ст 1, Ст2, Ст3, Ст4	Сталь Ст5	Стали повышенного качества $\sigma_{пц} > 320$ МПа	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,3	—	0,25
120	0,45	0,37	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Пример 13.2. Подобрать двутавровое сечение сжатого стержня с шарнирным закреплением концов, если сжимающая сила $P = 500$ кН, длина стержня 2 м, основное допускаемое напряжение 160 МПа.

Принимая в качестве первого приближения $\varphi_1 = 0,5$, получим

$F = P/(\varphi[\sigma]) = 500\cdot10^3/(0,5\cdot160\cdot10^6) = 0,00625$ м^2 = 62,5 см^2.

По ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр №36, у которого $F = 61,9$ см^2.

Наименьший радиус инерции из тех же таблиц сортамента i_{min}= 2,89 см. Гибкость стержня $\lambda = \mu l/i_{min} = 1\cdot200/2,89 = 69,5$.

Коэффициент φ по табл. 13.1 для стали Ст3 при $\lambda = 70$ равен $\varphi_1' = 0,81$. Действующие напряжения значительно меньше допустимых на устойчивость:

$$\frac{500\cdot10^3}{62,5\cdot10^{-4}} = 80\ \text{МПа} < 0,81\cdot160 = 129,6\ \text{МПа}.$$

Поэтому выбираем двутавр №30, у которого $F = 46,5$ см^2, $i_{min} = 2,69$ см. Гибкость стержня

$$\lambda = \mu l/i_{min} = 1\cdot200/2,69 \approx 75.$$

Коэффициент φ из табл. 13.1 (интерполируя значения, соответствующие $\lambda = 70$ и 80) равен $\varphi_2' \approx 0,78$.

Напряжение

$$\sigma = P/F = 500\cdot10^3/46,5\cdot10^{-4} = 108\ \text{МПа}.$$

Допускаемое же напряжение при расчете на устойчивость

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma] = 0,78\cdot160 = 122,5\ \text{МПа}.$$

Недонапряжение составляет (122,5 – 108)·100/122,5 = 11,8 %.

Выбираем двутавр №27, у которого $F = 40,2$ см^2, $i_{min} = 2,54$ см. Получим гибкость стержня $\lambda = 200/2,54 = 79$. Из таблиц коэффициент $\varphi_3' = 0,75$.

Напряжение

$$\sigma = P/F = 500\cdot10^3/40,2\cdot10^{-4} = 125\ \text{МПа}$$

Допускаемое напряжение на устойчивость

$$[\sigma]_y = \varphi[\sigma] = 0,75\cdot160 = 120\ \text{МП}$$

Перенапряжение 5·100/120 = 4,2 %, что допустимо.

Глава 14. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, ДВИЖУЩИХСЯ С УСКОРЕНИЕМ

14.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Расчет деталей машин на динамическую нагрузку более сложен, чем расчет на статическую нагрузку. Во-первых, более сложный метод определения внутренних усилий и напряжений, возникающих от действия динамической нагрузки, и, во-вторых более сложное определение механических свойств материалов. Так, при действии ударной нагрузки многие материалы, которые при статическом нагружении были пластичными, работают как хрупкие. Также известно, что при ударном растяжении предел текучести повышается на 20…70 %, а предел прочности на 10…30 % по сравнению со статическим растяжением. Пластичность с увеличением скорости деформирования убывает и при сравнительно невысоких скоростях нагружения наблюдается склонность материала к хрупкому разрушению. Поэтому допускаемые напряжения при динамическом нагружении должны задаваться в зависимости от скорости нагружения. В первом приближении в этих случаях можно использовать характеристики механических свойств материала, полученные при статическом нагружении.

Для определения усилий, возникающих в движущемся теле, широко используется принцип Даламбера, который формулируются следующим образом.

Если движущееся тело (систему тел) в какой-то момент времени представить находящимся в состоянии покоя, но помимо сил, производящих движение, приложить к нему силы инерции, то в нем будут действовать такие же внутренние усилия, напряжения и деформации, какие имеют место во время его движения.

Груз массой m, прикрепленный к проволоке длиной l, при вращении вокруг оси будет испытывать центростремительное ускорение $a = V^2/l = \omega^2 l$.

Сила инерции груза равна произведению массы груза на его ускорение и направлена в сторону, противоположную направлению ускорения (рис. 14.1):

$$P = m\frac{V^2}{l} = m\omega^2 l, \qquad (14.1)$$

где V — линейная скорость, $\omega = 2\pi n/60$ — угловая скорость груза, n — частота вращения груза, l — радиус вращения, m — масса.

Сила P вызывает напряжение в проволоке. Пусть $m = 0{,}1$ кг, $l = 1$ м, диаметр проволоки $d = 1$ мм, предел прочности материала проволоки $\sigma_B = 1500$ МПа. Тогда растягивающее напряжение в поперечном сечении проволоки

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{m\omega^2 l 4}{\pi d^2} = \frac{0{,}1 n^2 4 \cdot 3{,}14}{10^{-6} \cdot 900} \text{ МПа.}$$

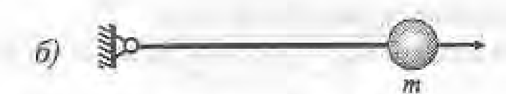
Проволока разорвется при $\sigma = \sigma_B$. Из этого условия находим предельную частоту вращения:

$$n = \sqrt{\frac{1500 \cdot 225 \cdot 10}{3{,}14}} = 1040 \text{ мин}^{-1}$$

а)



б)



в)

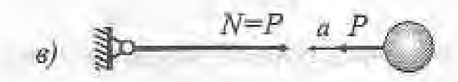


Рис. 14.1

14.2. РАСЧЕТ ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ СИСТЕМ

При движении груза (рис. 14.2) с ускорением в тросе появляются дополнительные напряжения, для определения которых мысленно остановим груз и приложим к нему силу инерции, которая направлена в сторону, противоположную движению груза и равна

$$F_{ин} = m \cdot \frac{dV}{dt} = ma,$$

где V — скорость подъема; a — ускорение.

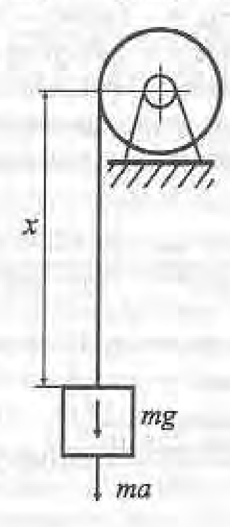


Рис. 14.2.

Усилие в тросе будет равно

$$N = mg + ma,$$

где g — ускорение свободного падения.

При этом напряжение в тросе при подъеме груза будет

$$\sigma_д = \frac{mg}{F}\left[1 + \frac{a}{g}\right] = \sigma_{ст} k_д,$$

больше напряжений при статическом приложении груза $\sigma_{ст} = mg/F$ в $k_д$ раз, где коэффициент

$$k_д = 1 + a/g$$

называется динамическим коэффициентом.

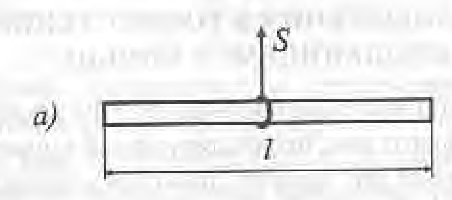
При опускании груза в начале движения ускорение a в формуле для динамического коэффициента будет иметь отрицательный знак. В этом случае напряжения в тросе будут меньше напряжений от статического действия груза.

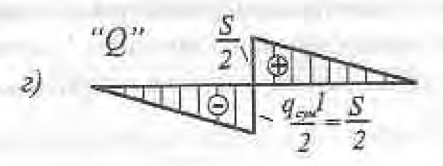
Если трос длинный, то следует учесть и его массу и силы инерции частиц. В этом случае опасным будет верхнее сечение каната, а усилие рассчитывается по формуле

$$N = (m + \rho F x) g \left[1 + \frac{a}{g}\right],$$

где x — длина каната; ρ — плотность материала каната.

Пусть горизонтальный брус поднимается вверх силой S, приложенной посредине бруса (рис. 14.3, а).





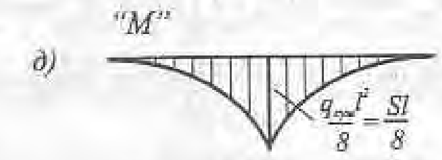


Рис. 14.3.

Интенсивность полной погонной нагрузки, состоящей из собственного веса q бруса (рис. 14.3, б) и инерционной нагрузки P_i (рис. 14.3, в), определяется по формуле

$$q_{сум} = q + p_i = \frac{G}{l} + \frac{G}{l}\frac{a}{g} = \frac{G}{l}(1 + \frac{a}{g}) = \frac{G}{l}k_д$$

или

$$q_{сум} = \frac{G}{l} + \frac{S - G}{l} = \frac{S}{l},$$

где G — вес бруса, a — ускорение бруса.

Сила S и нагрузка $q_{сум}$ вызывают изгиб бруса. Эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q показаны на рис. 14.3, г, д.

14.3. НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОСТЕННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЬЦЕ

При вращении тонкостенного кольца ($\delta >> R$) с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к плоскости кольца (рис. 14.4, а), каждый его элемент движется с центростремительным ускорением $a = \omega^2 R$. Силы инерции направлены в сторону, противоположную ускорениям, и при постоянном сечении распределены равномерно вдоль кольца. Элементарная сила инерции равна

$$dF_{ин} = dm\omega^2 R = \rho FRd\varphi\omega^2 R,$$

где dm — элементарная масса, ρ — плотность материала, F — площадь сечения, R — радиус средней линии кольца.

Рассечем кольцо диаметральной плоскостью на две части и приложим в сечениях осевые динамические силы $N_д$ (рис. 14.4, б).

Проецируя все силы, действующие на полукольцо, на ось y, получим

$$-2N_д + 2\int_0^{\pi/2} dF_{ин} \sin\varphi = -2N_д + 2\int_0^{\pi/2} \rho F \omega^2 R^2 \sin\varphi \, d\varphi = 0.$$

Проинтегрировав, получим динамическую продольную силу

$$N_д = \rho F\omega^2 R^2.$$

Динамическое нормальное напряжение равно

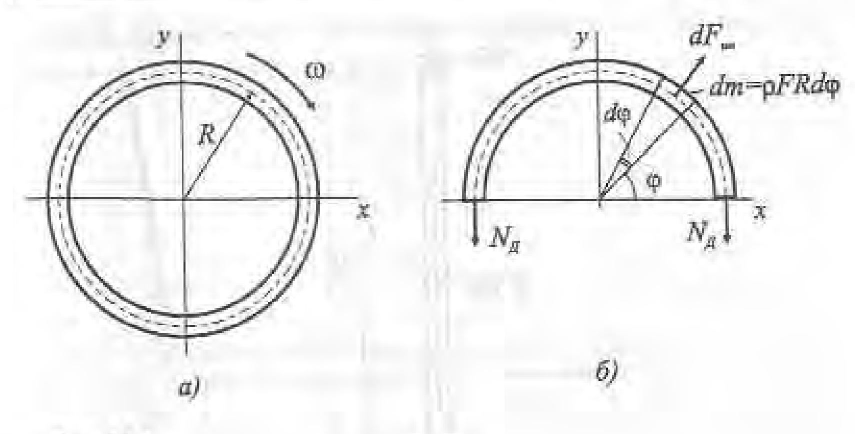


Рис. 14.4.

$$\sigma_д = \frac{N_д}{F} = \rho\omega^2 R^2.$$

Таким образом, напряжения во вращающемся тонкостенном кольце зависят только от линейной скорости $V = \omega R$ и плотности материала, но не зависят от площади его поперечного сечения. Поэтому увеличением размеров сечения напряжение уменьшить нельзя.

14.4. РАСЧЕТ РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПРЯМОГО БРУСА

Прямой брус постоянного поперечного сечения с подвешенным грузом равномерно вращается вокруг горизонтальной оси (рис. 14.5).

При отсутствии вращения напряжения в поперечных сечениях бруса изменяются по линейному закону:

$$\sigma(r) = \frac{N(r)}{F} = \frac{G + \rho g F(l - r)}{F},$$

где ρ — плотность материала бруса; F — площадь поперечного сечения; $G = mg$ — вес груза.

Приложим к каждому элементу бруса силу инерции, равную массе этого элемента, умноженной на его центростремительное ускорение. Динамическая продольная сила будет равна

$$N_д(r) = G + \rho g F(l - r) + \frac{G}{g}\omega^2 R + \int_r^l \rho F \omega^2 r \, dr.$$

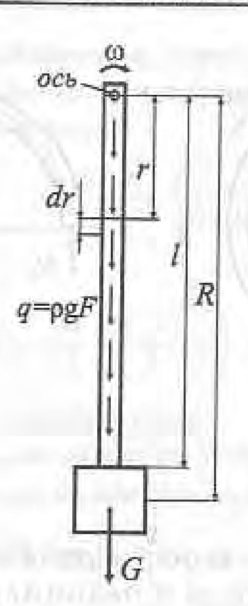


Рис. 14.5.

После интегрирования динамические напряжения определяются по формуле

$$\sigma_д(r) = \frac{N_д(r)}{F} = \frac{G}{F} + \rho g(l - r) + \frac{G}{gF}\omega^2 R + \rho\omega^2\left(l^2 - r^2\right)/2$$

Напряжения изменяются по квадратичному закону и достигают максимума на оси вращения:

$$\sigma_{д\max} = \frac{G}{F} + \rho g l + \frac{G}{gF}\omega^2 R + \rho\omega^2 l^2/2.$$

Перемещение текущего сечения бруса равно

$$\delta(r) = \int_0^r \frac{N_д(r)\,dr}{EF}.$$

Из уравнения находим удлинение всего бруса, вызванное его вращением.

При отсутствии груза следует исключить величину G.

При вращении стержня относительно вертикальной оси (рис. 14.6) полученные выше формулы для динамических усилий, напряжений и перемещений нетрудно модифицировать. Так, например, динамические напряжения будут равны:

$$\sigma_д(r) = \frac{N_д(r)}{F} = \rho\omega^2\left(\frac{l^2}{4} - r^2\right)/2.$$

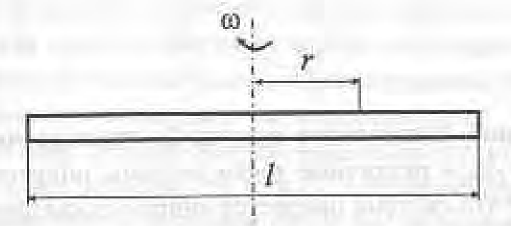


Рис. 14.6.

Глава 15. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ УДАРЕ

Под ударной понимается всякая быстроизменяющаяся нагрузка. При ударе различные точки системы получают некоторые скорости, так что системе придается кинетическая энергия, которая переходит в потенциальную энергию деформации конструкции, а также в другие виды энергии – прежде всего в тепловую.

При определении динамических допускаемых напряжений следует учитывать изменение механических характеристик материала. Однако ввиду недостаточной изученности этого вопроса расчет на прочность при динамической нагрузке обычно ведут по статическим характеристикам, т.е. условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\partial max} \le [\sigma]. \qquad (15.1)$$

При ударе возникают местные деформации в зоне контакта и общие деформации системы. Условимся рассматривать только общие деформации системы, и предположим, что динамические напряжения не превосходят предела пропорциональности материала.

Для приближенного определения напряжений и перемещений сечений в момент наибольшей деформации системы в практических расчетах применяется энергетический метод, который применим в тех случаях, когда скорость ударяющего тела мала по сравнению со скоростью распространения ударной волны, а время соударения значительно больше времени распространения этой волны по всей системе.

Указанное ограничение дает основание считать, что при ударе деформации распространяются мгновенно по всей стержневой системе и все ее точки начинают движение одновременно.

Таким образом, простейшая теория удара основана на следующих допущениях:

1. Удар считается **неупругим**, т.е. ударяющее тело продолжает двигаться вместе с ударяемой конструкцией, не отрываясь от нее. Иными словами ударяющее тело и ударяемая конструкция имеют общие скорости после удара.

2. Ударяемая конструкция имеет лишь **одну степень свободы,** и вся масса конструкции сосредоточена в точке удара.

3. Рассеянием энергии в момент удара пренебрегают, считая, что вся кинетическая энергия ударяющего тела переходит в потенциальную энергию деформации ударяемой конструкции, движение которой происходит при отсутствии сил сопротивления.

4. Ударяемая конструкция считается идеально **упругой**.

Это означает, что зависимость между динамическими усилиями и ими вызванными перемещениями, точно так же подчиняется закону Гука, как и при статическом действии нагрузок (рис. 15.1).

Отношение динамических и статических перемещений называется коэффициентом динамичности или динамическим коэффициентом

$$k_\partial = \frac{\delta_\partial}{\delta_{cm}}. \qquad (15.2)$$

В соответствии с законом Гука

$$k_\partial = \frac{R_\partial}{R_{cm}} = \frac{\sigma_\partial}{\sigma_{cm}}, \qquad (15.3)$$

где σ_∂ — динамические напряжения; σ_{cm} — статические напряжения.

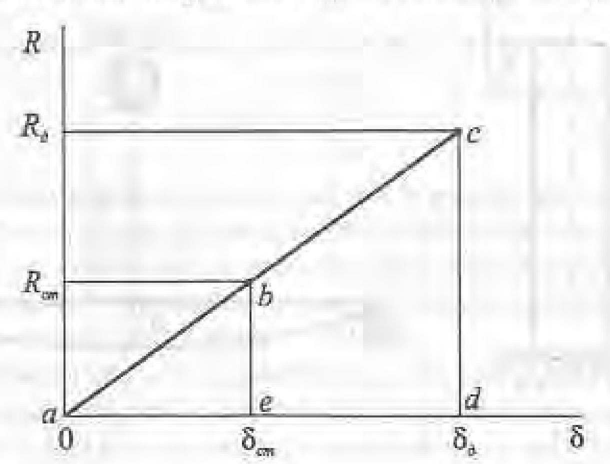


Рис. 15.1.

15.1. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР

Предположим, что груз массой m падает с некоторой высоты h на упругую систему, масса которой мала по сравнению с массой груза. Упругую систему будем считать невесомой (рис. 15.2, а, б).

Груз в процессе падения выполняет работу

$$A = Q(h + \delta_д)\ , \qquad (15.4)$$

где $\delta_д$ — динамический прогиб системы (перемещение точки удара) в момент наибольшей деформации.

На рис. 15.3 показано, что работа соответствует площади прямоугольника $abde$, так как величина веса груза Q в процессе удара не меняется.

Данная работа накапливается в системе в виде потенциальной энергии, которая равна работе внутренней силы R, вызывающей прогиб δ при ударе. На рис. 15.1 эта потенциальная энергия с учетом принятых выше допущений соответствует площади треугольника acd, так как сила R изменяется от нуля до конечного значения,

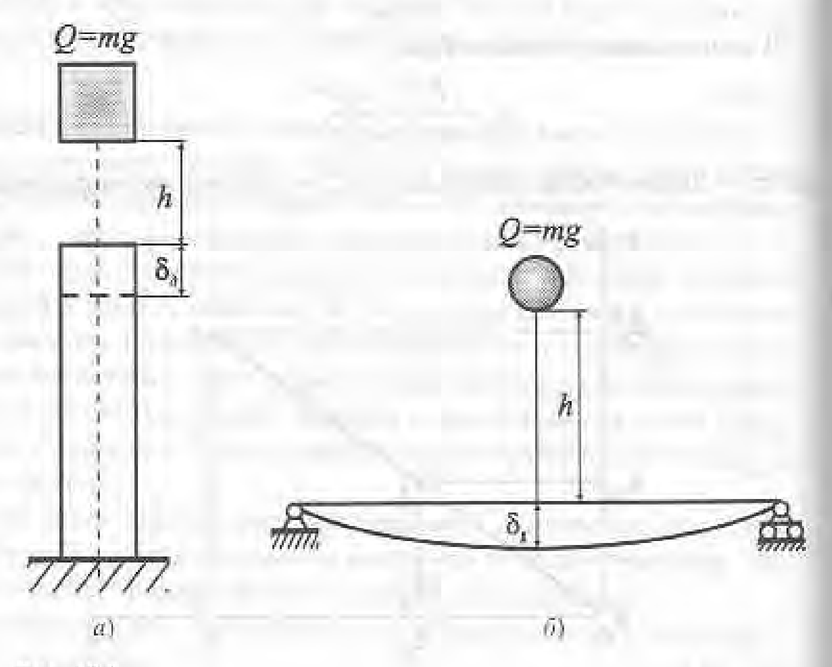


Рис. 15.2.

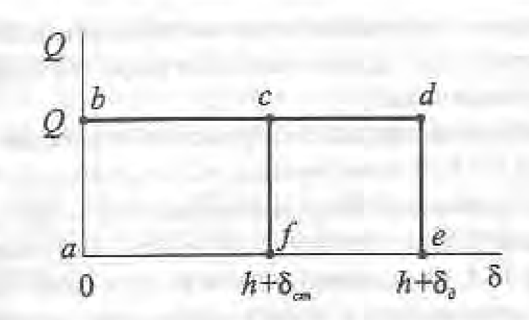


Рис. 15.3.

равного $R_д$, по линейному закону. Таким образом, потенциальная энергия равна

$$U = \frac{R_д \delta_д}{2}. \qquad (15.5)$$

Приравняв выражения (15.4) и (15.5), с учетом уравнений (15.2) и (15.3) имеем

$$Q\left(\frac{h}{\delta_{ст}} + k_д\right) = \frac{R_{ст} k_д^2}{2},$$

а при $Q = R_{ст}$

$$\frac{h}{\delta_{ст}} + k_д = \frac{k_д^2}{2}. \qquad (15.6)$$

Решая квадратное уравнение относительно $k_д$, получим

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}}. \qquad (15.7)$$

Положительный знак перед радикалом взят потому, что искомыми являются наибольшие деформации. Если груз после удара остается на упругой системе, то при отрицательном знаке перед радикалом решение данного уравнения даст наибольшее отклонение точки удара при возвратном движении.

После нахождения $k_д$, по уравнениям (15.2), (15.3) могут быть определены динамические напряжения и деформации системы, которые будут в $k_д$ раз больше тех, которые имели бы место в системе при статическом приложении груза Q.

Заметим, что упругие свойства системы, как видно из формулы (15.7), смягчают удар и, наоборот, сила удара тем больше, чем больше жесткость системы.

Частный случай ударного нагружения - **внезапное приложение груза**, когда $h = 0$. В этом случае $k_д = 2$ и $\sigma_д = 2\sigma_{ст}$, $\delta_д = 2\delta_{ст}$, т. е. при внезапном приложении нагрузки напряжения и деформации системы в два раза больше, чем при статическом нагружении.

Пример 15.1. Определить в каком из двух одинаковых стержней (рис.15.4), отличающихся только материалом, возникнут большие динамические напряжения.

Решение:

$$(k_д)_{ст} = 1 + \sqrt{\frac{2h}{(\delta_{ст})_{ст}}} = 1 + \sqrt{\frac{2hE_{ст}F}{Ql}},$$

$$(k_д)_{Al} = 1 + \sqrt{\frac{2h}{(\delta_{ст})_{Al}}} = 1 + \sqrt{\frac{2hE_{Al}F}{Ql}}.$$

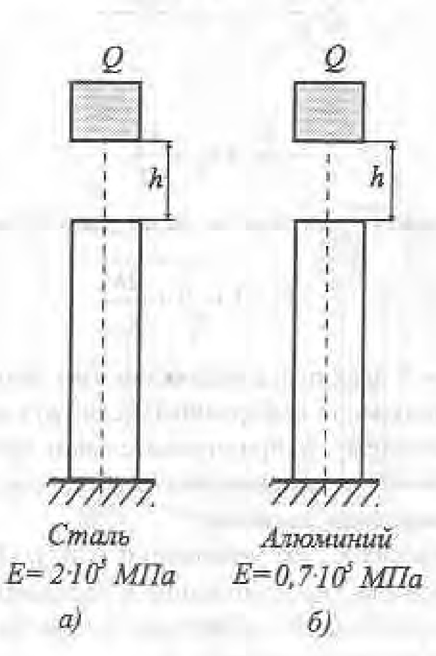


Рис. 15.4.

Таким образом, $(k_д)_{ст} > (k_д)_{Al}$ и динамические напряжения больше в стальном стержне (рис. 15.4, а).

Пример 15.2. Определить в каком из двух стержней (рис. 15.5), сделанных из одного материала, возникнут большие динамические напряжения.

В данном случае имеет место продольный растягивающий удар. Перемещение нижнего концевого сечения от статически приложенной силы Q будет

$$\delta^{\mathrm{I}}_{ст} = \frac{3}{2}\frac{Ql}{EF},$$

а второго стержня

$$\delta^{\mathrm{II}}_{ст} = \frac{2Ql}{EF}.$$

Следовательно,

$$\sigma^{\mathrm{I}}_д = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4hEF}{3Ql}}\right]\frac{Q}{F},$$

$$\sigma^{\mathrm{II}}_д = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{hEF}{Ql}}\right]\frac{Q}{F},$$

т.е. напряжения в первом стержне (рис. 15.5, а) больше, чем во втором.

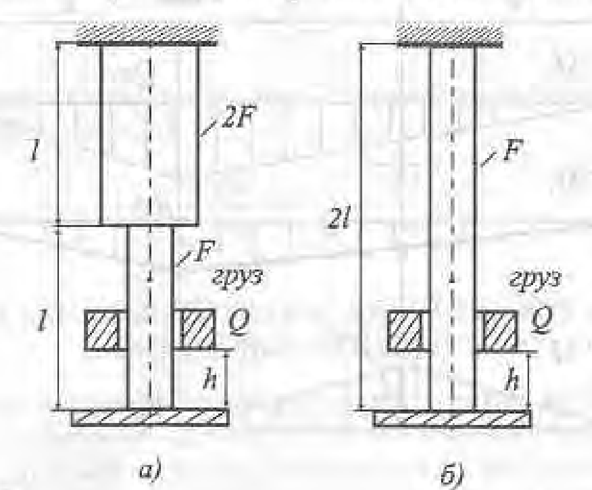


Рис. 15.5.

Пример 15.3. Определить максимальные динамические напряжения при вертикальном ударе и динамический прогиб балки в точке D (рис. 15.6).

Грузовая эпюра (M_P) изгибающих моментов от статически приложенного груза Q и эпюры изгибающих моментов от единичных сил, приложенных в точке удара (M_1) и в точке D ($M_1^{'}$), построены на рис. 15.6.

Максимальные динамические напряжения будут действовать в сечении правой опоры в месте действия максимального изгибающего момента:

$$\sigma_д = \sigma_{cm} k_д = \frac{M_{max}}{W_z} k_д = \frac{Qa}{W_z} k_д,$$

где

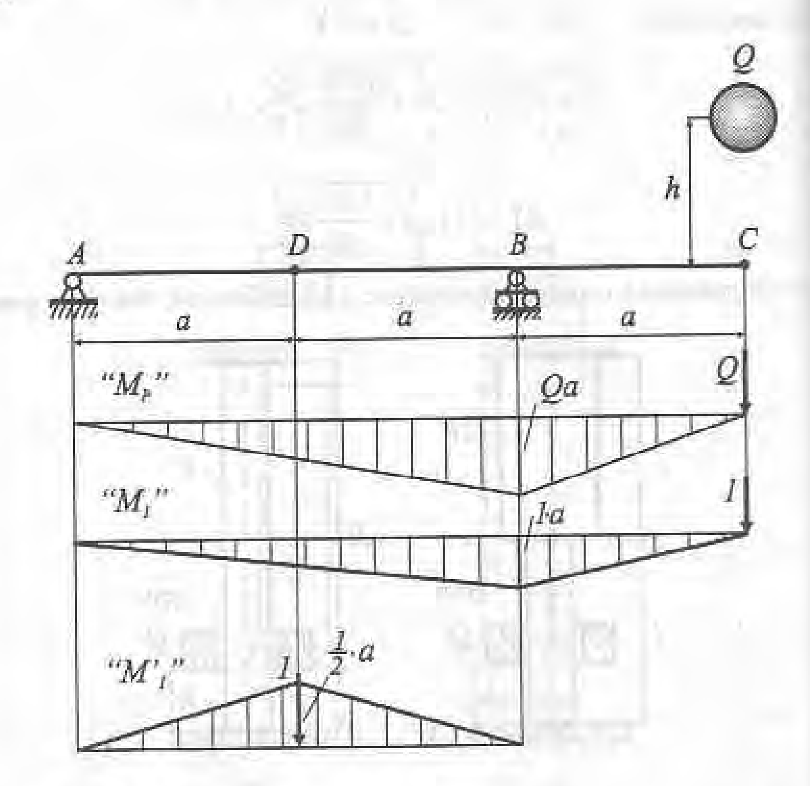


Рис. 15.6.

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{cm}}},$$

а δ_{cm} есть статический прогиб балки под падающим грузом, т.е. прогиб в точке C. Для определения этого перемещения воспользуемся правилом Верещагина:

$$\delta_{cm} = \frac{[M_P \times M_1]}{EI_z} = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{Qa^2}{2}\frac{2}{3}a + \frac{Qa}{2}2a\frac{2}{3}a\right) = \frac{Qa^3}{EI_z}.$$

Таким образом

$$\sigma_д = \frac{Qa}{W_z}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2hEI_z}{Qa^3}}\right].$$

Динамический прогиб в точке D равен

$$(\delta_д)_D = (\delta_{cm})_D k_д,$$

статический прогиб в точке D определятся с помощью правила «дирижера»:

$$(\delta_{cm})_D = \frac{[M_P \times M_1^{'}]}{EI_z} = -\frac{a}{6EI_z}\left(2\frac{Qa}{2}\frac{a}{2}\right) - \frac{a}{6EI_z}\left(2\frac{Qa}{2}\frac{a}{2} + Qa\frac{a}{2}\right) =$$

$$= -\frac{Qa^3}{4EI_z}.$$

Знак минус означает, что точка D перемещается вверх. Окончательно имеем

$$(\delta_д)_D = \frac{Qa^3}{4EI_z}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2hEI_z}{Qa^3}}\right].$$

15.2. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ВСЛЕДСТВИЕ ВНЕЗАПНОЙ ОСТАНОВКИ ДВИЖЕНИЯ

Удар вследствие внезапной остановки движения возникает, например, в тросе лифта при внезапной остановке кабины или в балке, на которой закреплен груз Q при жесткой посадке самолета, имеющего вертикальную посадочную скорость V (рис. 15.7).

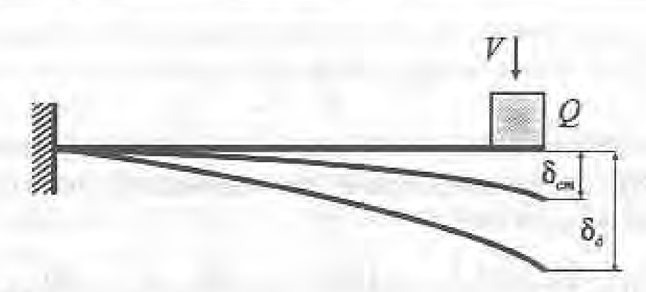


Рис. 15.7.

Использовать формулу (15.7) для определения коэффициента динамичности нельзя, так как к моменту удара балка уже воспринимает статическую нагрузку Q. Кинетическая энергия движущейся вертикально конструкции равна $T = QV^2/2g$, работа груза на дополнительном перемещении $(\delta_д - \delta_{cm})$ — $A = Q(\delta_д - \delta_{cm})$ (площадь прямоугольника *cdef* см. рис. 15.3). Работа переходит в дополнительную потенциальную энергию деформации балки:

$$U = \frac{1}{2}(R_д + R_{cm})(\delta_д - \delta_{cm}),$$

соответствующей площади трапеции *bcde* на рис. 15.1. Приравнивая $T + A = U$ с учетом уравнений (15.2), (15.3), получим квадратное уравнение:

$$\frac{V^2}{g\delta_{cm}} + 2(k_д - 1) = (k_д + 1)(k_д - 1),$$

решая которое получим коэффициент динамичности при внезапной остановке движения

$$k_д = 1 + \frac{V}{\sqrt{g\delta_{cm}}}. \qquad (15.8)$$

15.3. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР

Потенциальная энергия, накопленная в системе к моменту возникновения наибольшей деформации $\delta_д$ равна кинетической энергии системы в момент соприкосновения с ней массы m (рис. 15.8).

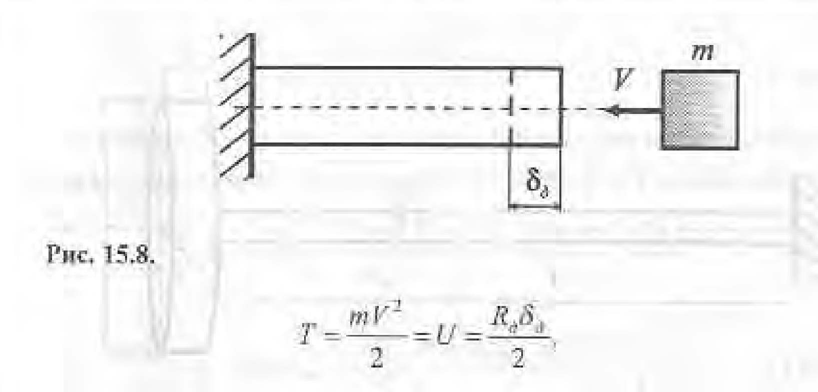


Рис. 15.8.

$$T = \frac{mV^2}{2} = U = \frac{R_д\delta_д}{2}.$$

С учетом уравнений (15.2), (15.3), а также, принимая условно $R_{cm} = mg$, получим

$$\frac{V^2}{2} = \frac{k_д^2 mg\delta_{cm}}{2},$$

откуда определяем *коэффициент динамичности при горизонтальном ударе*:

$$k_д = \frac{V}{\sqrt{g\delta_{cm}}}, \qquad (15.9)$$

где δ_{cm} — перемещение точки системы в месте приложения к ней статической силы mg.

15.4. СКРУЧИВАЮЩИЙ УДАР

Напряжения и деформации при ударном кручении определяются так же, как и при ударном растяжении (сжатии) или ударном изгибе. При ударном кручении применимы формулы для определения коэффициента динамичности (15.7), (15.9).

Например, при ударном скручивании вследствие резкого торможения быстро вращающегося вала, несущего маховик (рис. 15.9), кинетическая энергия T маховика переходит в потенциальную энергию U деформации вала:

$$T = \frac{I_m\omega^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения маховика;

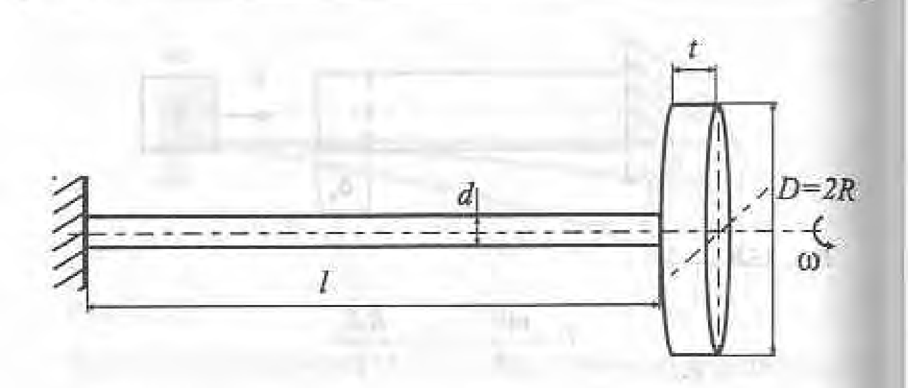


Рис. 15.9.

$I_m = \iint\limits_F r^2 dm = 4\rho t \int\limits_0^R r^3 dr \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \rho t \dfrac{\pi R^4}{2} = \dfrac{m R^2}{2} = \dfrac{Q D^2}{8g}$ — массовый момент инерции маховика;

$dm = \rho t r dr d\varphi$ — элементарная масса;

$m = \rho t \dfrac{\pi D^2}{4}$ — масса маховика;

$Q = mg$ — вес маховика; ρ — плотность материала маховика.

Потенциальная энергия деформации вала с учетом уравнений (15.2), (15.3):

$$U = \frac{M_{кр д} \varphi_д}{2} = \frac{k_д^2 M_{кр} \varphi}{2}.$$

Так как угол закручивания при кручении вала круглого профиля равен

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G I_p},$$

имеем

$$U = \frac{k_д^2 M_{кр}^2 l}{2 G I_p}.$$

Приравнивая $T = U$, после преобразований, получим формулу для определения *коэффициента динамичности при скручивающем ударе*:

$$k_д = \frac{\omega}{M_{кр}} \sqrt{\frac{G I_p I_m}{l}}. \qquad (15.10)$$

Динамические касательные напряжения $\tau_д$ и динамический угол закручивания $\varphi_д$ вала определяются из следующих уравнений:

$$\tau_д = k_д \tau_{ст} = \frac{\omega}{W_p} \sqrt{\frac{G I_p I_m}{l}} = \frac{\omega D^2}{2d} \sqrt{\frac{G t \rho}{l}}, \qquad (15.11)$$

$$\varphi_д = k_д \varphi_{ст} = \frac{\omega l}{G I_p} \sqrt{\frac{G I_p I_m}{l}} = \frac{\omega l D^2}{d^2} \sqrt{\frac{G t \rho}{l}}. \qquad (15.12)$$

Глава 16. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

16.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Теория колебаний охватывает широкий круг вопросов в области механики, электротехники, радиотехники, оптики и т.д. Особое значение данный раздел физики имеет в решении задач, встречающихся в инженерной практике, в частности, при расчетах прочности машин и сооружений. Известны случаи, когда строительное сооружение, рассчитанное с большим запасом прочности на статическую нагрузку, разрушалось под действием сравнительно небольших периодически действующих сил. Зачастую жесткая и достаточно прочная конструкция оказывается непригодной при воздействии переменных сил, в то время как более легкая, и на первый взгляд, менее прочная конструкция выдерживает эти усилия не разрушаясь. Поэтому работе упругих систем под действием переменных нагрузок конструкторы уделяют особое внимание.

Прежде всего, упругие системы различают по **числу степеней свободы.**

Под степенью свободы понимается число независимых координат, определяющих положение системы. Так, например, жесткая масса, связанная с пружиной, имеет одну степень свободы, поскольку ее положение определяется только одной координатой. Это верно в том случае, если пренебречь массой пружины. В противном случае, для того чтобы задать положение системы в любой момент времени, необходимо ввести бесчисленное множество координат, определяющих положение всех точек упругой пружины, и система будет иметь бесконечное число степеней свободы.

Для системы, изображенной на рис. 16.1, положение колеблющегося груза в вертикальной плоскости определяется тремя независимыми координатами: двумя координатами центра тяжести и углом

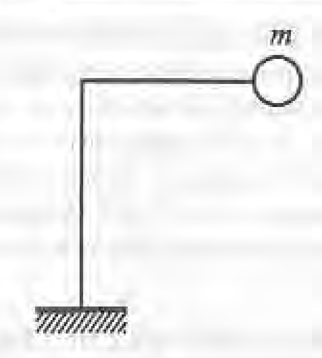


Рис. 16.1.

поворота массы относительно центра тяжести. Следовательно, данная система имеет три степени свободы.

Любое реальное упругое тело имеет бесчисленное множество степеней свободы. Однако приближенно упругие тела можно рассматривать как предельный случай системы, состоящей из большого числа масс, соединенных между собой упругими связями.

Число степеней свободы определяется выбором расчетной схемы, т.е. степенью приближения, с которой мы считаем необходимым или возможным исследовать реальный объект.

При исследовании упругих систем различают **собственные и вынужденные колебания**.

Под **собственными** колебаниями понимают колебательные движения, которые совершает система, освобожденная от внешнего активного силового воздействия и предоставленная самой себе. Примером собственных колебаний являются, например, колебания камертона. В этом случае движение происходит в результате начального импульса, сообщенного системе при ударе. Собственные колебания, как правило, затухающие.

Под **вынужденными** колебаниями понимают движение упругой системы, происходящее под действием изменяющихся внешних сил, называемых возмущающими. Примером вынужденных колебаний является движение, которое совершает упругое основание, если на нем установлен плохо сбалансированный двигатель. В этом случае двигатель является источником энергии, периодически подаваемой в систему и расходуемой в процессе вынужденных колебаний на работу преодоления сил трения. Сила, действующая на упругое основание со стороны двигателя, является возмущающей силой.

Промежуток времени T между двумя последующими максимальными отклонениями упругой системы от положения равновесия называется **периодом колебаний.** Величина, ему обратная, называется **частотой колебаний** $\nu = 1/T$ и представляет собой число колебаний в единицу времени. В технике в большинстве случаев используется **круговая частота** $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. **Амплитудой колебаний** A называется наибольшее смещение упругой системы от положения статического равновесия.

16.2. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

При составлении уравнений движения будем исходить из принципа Д'Аламбера.

В таблице 16.1 представлены основные характеристики колебаний механических систем с одной степенью свободы.

Во всех трех случаях координата y отсчитывается от положения, соответствующего ненапряженной пружине (без груза). При этом предполагается, что такое же положительное направление имеют скорость и ускорение. Поэтому сила сопротивления и сила инерции направлены вверх. Характеристика y_m представляет собой статическое перемещение, вызванное приложенной массой m к упругой системе. В положении статического равновесия сила упругости растянутой на величину y_m пружины уравновешивается весом груза

$$c\,y_m = mg. \qquad (16.1)$$

Уравнение (16.1) позволяет с учетом преобразований дифференциального уравнения свободных колебаний получить уравнение круговой частоты собственных колебаний упругой системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_m}}, \qquad (16.2)$$

где c — жесткость упругой системы.

Дифференциальные уравнения в табл. 16.1 составлены для исходной системы координат путем проекции всех сил на ось y. Для упрощения решения система координат сдвигается вниз на величину y_m, т.е. вводится новая переменная $z = y - y_m$.

Амплитуды и сдвиг фаз колебаний определяются путем задания начальных условий.

Таблица 16.1. Основные характеристики колебаний упругих систем с одной степенью свободы

Колебания	Свободные колебания	Свободные колебания с учетом сил сопротивления	Вынужденные колебания с учетом сил сопротивления
Рисунок Дифференциальное уравнение	Рис. 16.2, а. $m\ddot{y} + c\,y = mg$ $c\,y_m = mg;\ z = y - y_m$ $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$	Рис. 16.2, б. $m\ddot{y} + \mu\dot{y} + c\,y = mg$ $\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega^2 z = 0$	Рис. 16.2, в. $z = z_1 + z_2 = C_1 e^{-nt}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - n^2} + \varphi\right) + \dfrac{h_o \sin(pt - \psi)}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + (2np)^2}}$
Решение	$z = C_1 \sin(\omega t + \varphi)$	$z = C_1 e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi)$	$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + c\,y = mg + H_o \sin pt$ $\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega^2 z = h_o \sin pt$ $h_o = H_o / m$
График решения	Рис. 16.3.	Рис. 16.4.	—
Частота колебаний	$\omega = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/y_m}$	$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$	p
Амплитуда и сдвиг фаз колебаний	$A = C_1 = \sqrt{z_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$ б $\varphi = arctg(z_0\omega / v_0)$	$A = C_1 e^{-nt}$	$A = y_{cm}(H_o)\,\beta;\ \ y_{cm}(H_o) = H_o/(m\omega^2) = H_o/c;$ $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{p^2}{\omega^2}}};\ \lambda = \omega/2n,\ \sin\psi = p\beta/(\lambda\omega)$

Примечание. $F_{упр} = cy$ — сила упругости растянутой пружины, $P = mg$ — вес груза, $F_{сопр} = m\dot{y}$ — сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости движения, $F_{ин} = m\ddot{y}$ — сила инерции, $F_{возм} = H_o \sin pt$ — возмущающая сила, изменяющаяся по периодическому закону.

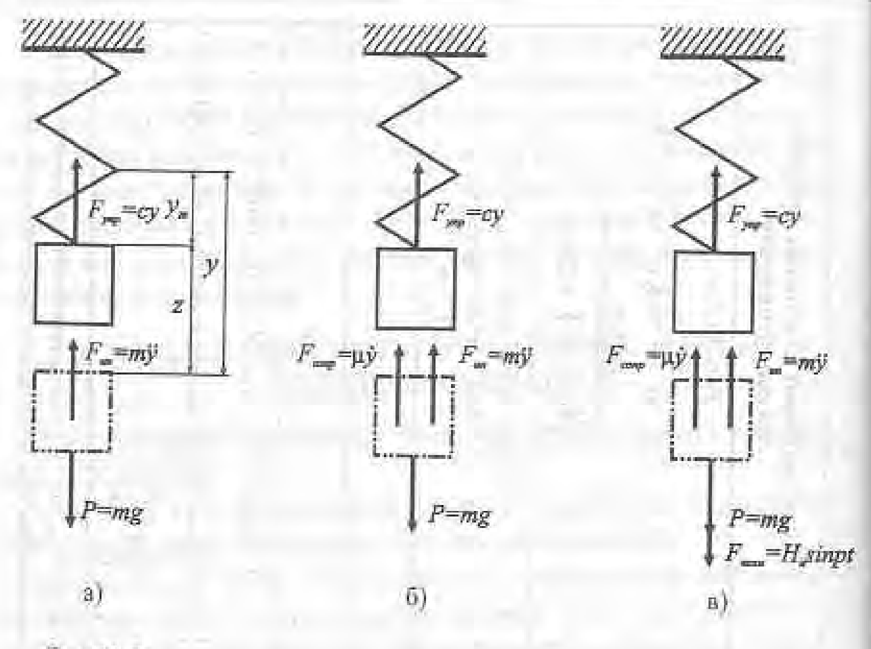


Рис.16.2.

Свободные колебания (рис. 16.2,а) происходят без рассеяния энергии, т.е. при отсутствии сил сопротивления и продолжаются неопределенно долго. В действительности же всегда существуют внешние силы, направленные против движения масс и приводящие к постепенному уменьшению амплитуды колебаний (рис. 16.2,б). По истечении некоторого времени собственные колебания полностью прекращаются.

Природа сил сопротивления бывает различной. Это может быть сопротивление среды (воздух, вода), сопротивление масляного слоя в подшипниках, внутреннее трение в частицах металла и пр. Сила трения имеет сложную зависимость от параметров движения упругой системы. Для упрощения принимают, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости движения. Например, для рассмотренной системы масса—пружина при составлении уравнения движения в число внешних сил включается сила сопротивления $F_{сопр} = \mu\dot{y}$, где μ — коэффициент пропорциональности между силой и скоростью. Из решения дифференциального уравнения свободных колебаний с учетом сил сопротивления видно, что

линейное затухание колебания происходит с уменьшающейся амплитудой (рис. 16.4) при частоте ω_1. Величина ω_1 мало отличается от ω, т.е. от частоты собственных колебаний без затухания, поскольку величина n^2 $(2n = \mu/m)$ мала по сравнению с ω. Через интервал времени $T = 1/2\pi\omega_1$ амплитуда колебаний уменьшится на величину

$$\frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+T)}} = e^{nT}.$$

Это означает, что отношение двух последующих амплитуд остается величиной постоянной, не зависящей от времени, поскольку сила сопротивления пропорциональна скорости движения массы.

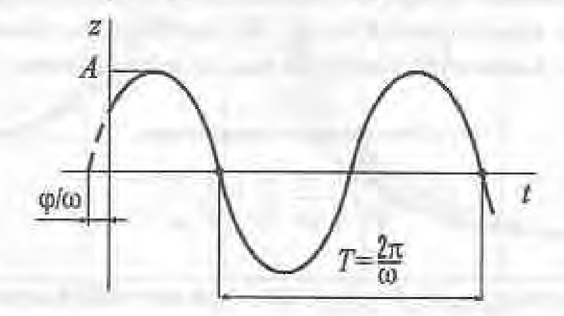


Рис. 16.3.

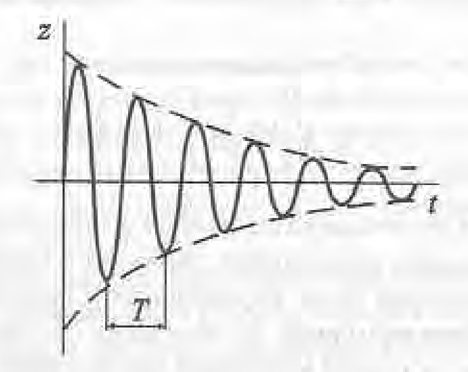


Рис.16.4.

При составлении дифференциального уравнения вынужденных колебаний вводится также внешняя возмущающая сила $F_{возм}$, изменяющаяся по гармоническому закону с амплитудой H_0 и круговой

частотой — p. Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний складывается из решения однородного уравнения без правой части и частного решения уравнения с правой частью. Решение однородного уравнения дает закон движения при собственных колебаниях с затуханием. Частное решение представлено в табл. 16.1. Из полного решения видно, что система испытывает два колебательных движения. Первое представляет собой собственное колебательное движение, амплитуда и фаза которого определяются начальными условиями. Эти колебания являются затухающими и по истечении некоторого времени практически исчезают. Второе колебательное движение происходит с частотой возмущающей силы p и сдвигом фаз ψ, которое не затухает, а продолжается, пока действует возмущающая сила. Эти колебания называются вынужденными. Амплитуда вынужденных колебаний равна

$$A = \frac{H_a / c}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\frac{p^2}{\omega^2}}}. \qquad (16.3)$$

Отношение $y_{cm}(H_a) = H_a / c$ представляет собой перемещение, которое получила бы упругая система, если бы к ней была статически приложена сила H_a. Следовательно, коэффициент

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\frac{p^2}{\omega^2}}} \qquad (16.4)$$

показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического перемещения, вызванного максимальным значением возмущающей силы. Коэффициент β называется **коэффициентом усиления колебаний**. Коэффициент λ в уравнении (16.4) — **коэффициент усиления колебаний при резонансе**, так как $\beta = \lambda$ при $p = \omega$. Коэффициент β зависит от двух величин: от отношения частот p/ω и коэффициента $\lambda = \omega/2n$, т.е. от параметра затухания колебаний. На рис. 16.5 показаны зависимости коэффициента усиления колебаний β от отношения частот для некоторых значений λ.

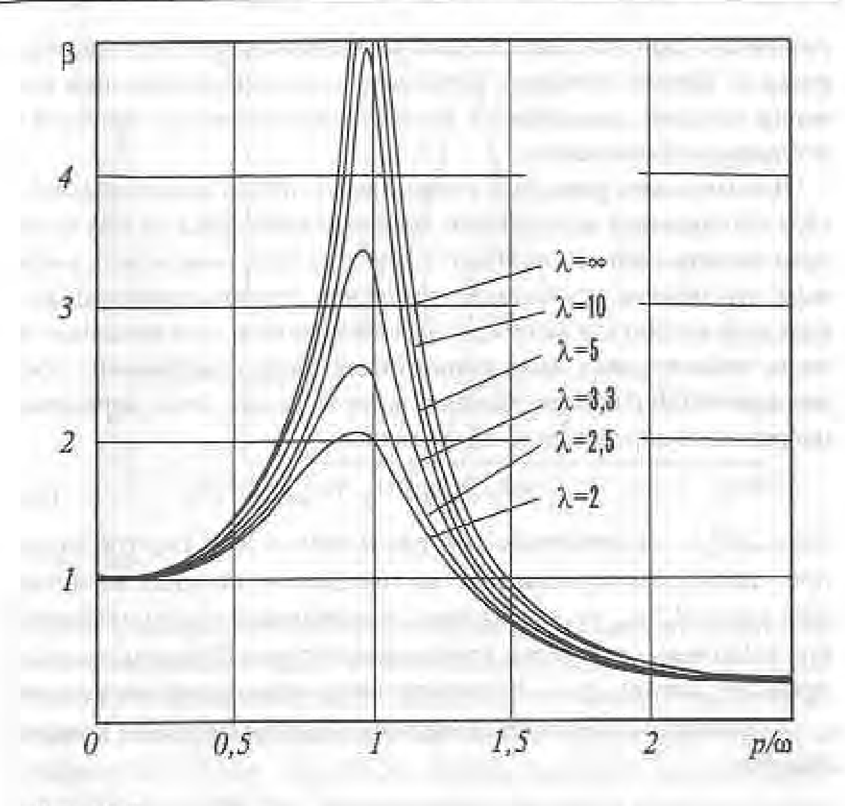


Рис. 16.5.

При $\lambda = \infty$, т.е. при $n = 0$ (отсутствие затухания), величина β в случае совпадения частот собственных и вынужденных колебаний $p/\omega = 1$ обращается в бесконечность. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает. При затухании величина β остается ограниченной, но в зоне совпадения частот имеет максимальное значение.

Резкий скачок амплитуды при совпадении частот собственных колебаний и возмущающей силы называется резонансом, а само совпадение частот называется условием резонанса.

В инженерных расчетах на динамическую прочность проблема резонанса важна, так как в большинстве случаев законы изменения возмущающих сил носят периодический характер. Например, несбалансированные подвижные части работающего двигателя создают периодически изменяющиеся силы. Поезд, идущий по пути с по-

стоянной скоростью, испытывает периодические толчки на стыках рельсов. Детали приборов, установленных на вибрирующем основании (самолет, автомобиль), подвергаются толчкам с частотой колеблющегося основания.

Данная задача решается, прежде всего, путем сопоставления частот собственных колебаний и возмущающей силы. В том случае, если частоты сильно отличаются друг от друга, можно быть уверенным, что явление резонанса не возникнет. При этом необходимо определить амплитуду вынужденных колебаний и максимальное значение действующих напряжений цикла. Если коэффициент усиления колебаний β найден, максимальное значение цикла переменных напряжений определяется по формуле

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_m + \sigma_{cm}(H_a)\beta, \tag{16.5}$$

где $\sigma_{cm}(H_a)$ — напряжение, которое возникло бы в упругой системе при статическом приложении максимального значения возмущающей силы H_a; σ_m — напряжение, возникающее в упругой системе под действием статически приложенного груза $P = mg$ (среднее напряжение цикла); σ_a — амплитуда цикла переменных напряжений.

Аналогично определяется максимальное перемещение в упругой системе:

$$y_{max} = y_m + y_a = y_m + y_{cm}(H_a)\beta. \tag{16.6}$$

Условие прочности при вынужденных колебаниях имеет вид:

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_{cm}(H_a)\beta \le [\sigma], \tag{16.7}$$

где $[\sigma]$ — основное допускаемое напряжение материала.

Для определения области опасных значений отношения частот (при $\omega = \text{const}$), в которой максимальные напряжения превышают допускаемые (рис. 16.6), необходимо решить относительно $x = p/\omega$ следующее уравнение:

$$\sigma_m + \sigma_{cm}(H_a)\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{1}{\lambda^2}x^2}} = [\sigma]. \tag{16.8}$$

При этом следует иметь в виду, что возмущающая сила H_a зависит от частоты $p = x\omega$, а следовательно, от x.

В том случае, когда сопоставление частот p и ω указывает на

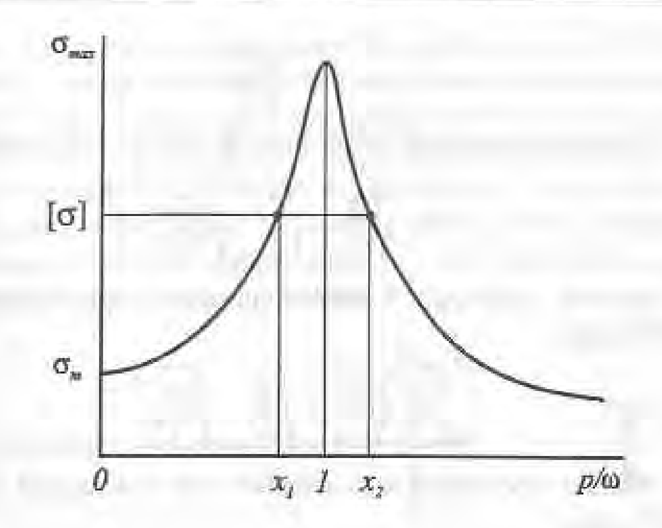


Рис. 16.6.

опасность резонанса, обычно путем конструктивных изменений добиваются изменения одной из частот. При этом наиболее целесообразным будет изменение частот в сторону увеличения значения отношения p/ω с тем, чтобы добиться наиболее заметного снижения коэффициента β (см. рис. 16.5). Проще всего это сделать путем смягчения подвески, т.е. уменьшением жесткости упругих элементов колебательной системы. Если конструктор лишен возможности варьирования частотами, то при возникновении опасности резонанса практикуется демпфирование системы, т.е. установка специальных устройств, повышающих рассеяние энергии при колебаниях. Коэффициент затухания n при этом возрастает, и амплитуда в зоне резонанса при неизменном отношении частот снижается.

При приложении возмущающих сил амплитуда вынужденных колебаний достигает своего значения не сразу. Требуется некоторое время, чтобы раскачать систему. В связи с этим кратковременное состояние резонанса для сооружений не представляет, как правило, опасности, так как амплитуда в течение короткого промежутка времени не успевает достичь больших значений.

Пример 16.1. Определить частоту собственных колебаний упругих систем, изображенных на рис. 16.7, 16.8 и 16.9.

Осадка пружины (рис. 16.7) равна

$$\lambda = \frac{8QD^3 n}{G d^4}.$$

Частота собственных колебаний, формула (16.2), равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_m}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} = \sqrt{\frac{g G d^4}{8 Q D^3 n}}.$$

Частота собственных колебаний для упругого стержня (рис. 16.8) равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{g E F}{Q l}}.$$

Частота собственных колебаний для консольной балки (рис. 16.9) равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_m}} = \sqrt{\frac{3 g E I_z}{Q l^3}}.$$

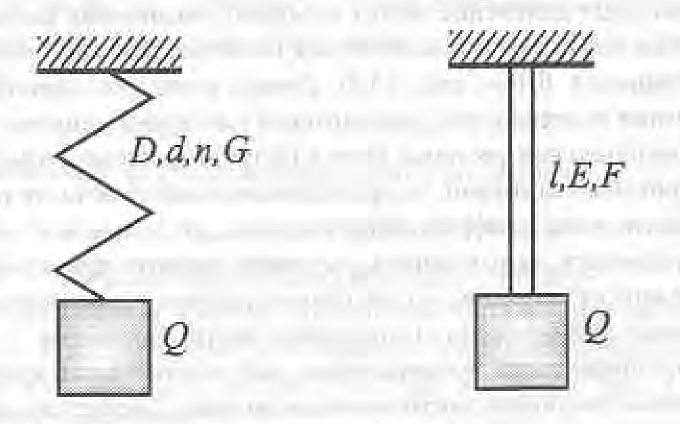


Рис. 16.7. Рис. 16.8.

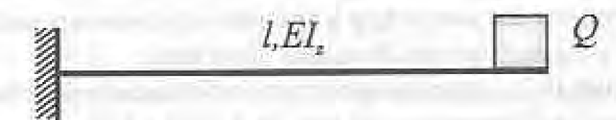


Рис. 16.9.

Пример 16.2. Определить размеры поперечного сечения консольной балки с поперечным сечением, состоящим из двух швеллеров (рис. 16.10). На балке установлен электродвигатель, имеющий несбалансированную вращающуюся массу m. Произведение радиуса дисбаланса на массу $mr = 0{,}05$ кг·м. Длина балки $l = 1$ м. Число оборотов массы $n = 3000$ мин$^{-1}$. Вес двигателя $P = 2000$ Н. Коэффициент усиления колебаний при резонансе $\lambda = 32$. Допускаемое напряжение материала балки $[\sigma] = 60$ МПа.

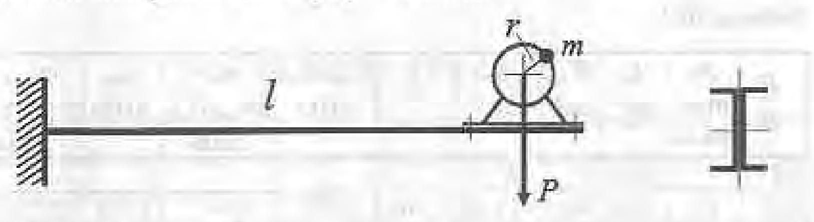


Рис. 16.10.

Круговая частота возмущающей силы равна

$$p = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 3000}{30} = 314{,}16 \text{ сек}^{-1}.$$

Частота собственных колебаний для консольной балки определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_m}} = \sqrt{\frac{3 g E I_z}{P l^3}}.$$

Условие прочности, выражение (16.7), имеет вид

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_{cm}(H_a)\beta = \frac{M_z(P)}{W_z} +$$

$$+ \frac{M_z(H_a)}{W_z} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\frac{p^2}{\omega^2}}} \le [\sigma],$$

В заделке действуют максимальные изгибающие моменты, которые равны:

$$M_z(P) = Pl, \quad M_z(H_a) = H_a l = m r p^2 l,$$

где $H_0 = m \cdot r \cdot p^2$ — амплитудное значение возмущающей (инерционной) силы.

Поскольку в условие прочности входят неизвестные моменты сопротивления и инерции, дальнейшие вычисления осуществляем методом последовательных приближений. Все расчеты для до резонансной (первое приближение $p/\omega = 0{,}8$) и за резонансной (первое приближение $p/\omega = 1{,}2$) областей сведены в табл. 16.2.

Таблица 16.2.

$\frac{p}{\omega}$	№ профиля	I_z, см^4	W_z, см^3	ω, сек$^{-1}$	β	$\sigma_{cm}(H_a)$, МПа	$\sigma_a = \beta\sigma_{cm}(H_a)$, МПа	σ_m, МПа	$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$, МПа
0.8	-	5241	-	392,7	-	-	-	-	-
0,76	24	5800	484	413,08	2,368	10,195	24,14	4,132	28,276
0,89	22	4220	384	352,35	4,832	12,851	62,096	5,208	67,304
0,848	**22а**	**4660**	**424**	**370.26**	**3,554**	**11,639**	**41,368**	**4,717**	**46,085**
1,2	-	2330	-	261,8	-	-	-	-	-
1,187	18а	2380	264	264,6	2,43	18,692	45,454	7,576	53,030
1,427	16а	1646	206	220	0,962	23,955	23,055	9,708	32,763
5,875	6,5	97,2	30	53,47	0,030	164,5	4,908	66,06	71,57
4,329	**8**	**179**	**44,8**	**72,6**	**0,056**	**110,15**	**6,208**	**44,643**	**50,851**

Как видно из табл. 16.2, условию прочности отвечают: для до резонансной области швеллер № 22, а, для за резонансной области – швеллер № 8. При этом вес погонного метра швеллера № 22, а в 3,2 раза больше, чем для швеллера номера 8. Кроме этого у швеллера № 8 значительно меньше амплитуда напряжений цикла, что имеет существенное значение для усталостной прочности.

Глава 17. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ НАПРЯЖЕНИЯХ

17.1. ЯВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

При эксплуатации машин и конструкций напряжения в многочисленных их элементах могут многократно изменяться как по величине, так и по направлению.

Так, например, действия переменных напряжений испытывают силовой набор и обшивка крыла, оперения и фюзеляжа самолета, лопасти винтов, мосты и колеса транспортных средства, вагонные оси, валки прокатных станов.

Детали, подвергающиеся воздействию переменных напряжений, разрушаются при напряжениях, значительно меньших значений предела прочности, а иногда и предела пропорциональности материала.

Явление разрушения под действием переменных напряжений называется **усталостью материала.**

17.2. МЕХАНИЗМ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ

Если значения переменных напряжений превышают некоторый предел, то в материале происходит процесс постепенного накопления повреждений, который приводит к образованию субмикроскопических трещин. Со временем длина этих трещин увеличивается, они объединяются, образуя первую микроскопическую трещину, (протяженностью порядка 0,1…0,5 мм). Трещина становится концентратором напряжений, что способствует ее дальнейшему росту. Это ослабляет сечение и в некоторый момент времени вызывает внезапное разрушение детали, которое нередко становится причиной аварий.

Процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению

свойств материала, образованию трещин и разрушению детали, называется усталостным разрушением (усталостью).

Развитие трещин идет особенно интенсивно, если напряжения изменяются не только по величине, но и по знаку.

Механизм усталостного разрушения связан с неоднородностью материала: различных размеров и конфигураций отдельных зерен, направлений их кристаллографических плоскостей, наличием неоднородных фаз, включений, дефектов кристаллической решетки (вакансий, дислокаций), остаточных напряжений.

Металл состоит из связанных между собой кристаллов, между которыми имеются поры и неметаллические включения.

Кристаллы, как правило, анизотропны. Однако металлы, состоящие из большого числа различно ориентированных кристаллов (зерен), проявляют свойства изотропии. Если же в ориентации зерен наблюдается упорядоченность, вызванная специальной обработкой металла, например, прокаткой, протяжкой и т. п., то материал будет проявлять анизотропные свойств.

При нагружении детали в зернах вследствие анизотропии и случайной ориентировки их кристаллографических осей будет наблюдаться различная напряженность, так как жесткость кристаллов в направлении действия нагрузки будет разной.

Из-за неоднородности материала при переменных напряжениях, даже не превышающих среднего значения предела пропорциональности, в отдельных неблагоприятно ориентированных зернах будет происходить циклическая пластическая деформация.

Образование первых сдвигов начинается, как правило, на поверхности детали вследствие благоприятных условий деформирования отдельных зерен в этой зоне и наличия концентрации напряжений от микронеровностей на поверхности. Кроме того, на поверхности обычно действуют наибольшие напряжения.

Поверхность усталостного излома детали имеет две зоны (рис 17.1). Первая — зона *А*, область распространения трещины. В результате взаимного трения и наклепа от повторяющегося нажатия поверхностей трещины друг на друга, стороны этой зоны имеют гладкую притертую поверхность. Вторая - зона *Б*, где даже пластичный материал имеет крупнозернистую структуру, такую же, как и у поверхности разрушения чугуна при одноосном статическом растяжении.

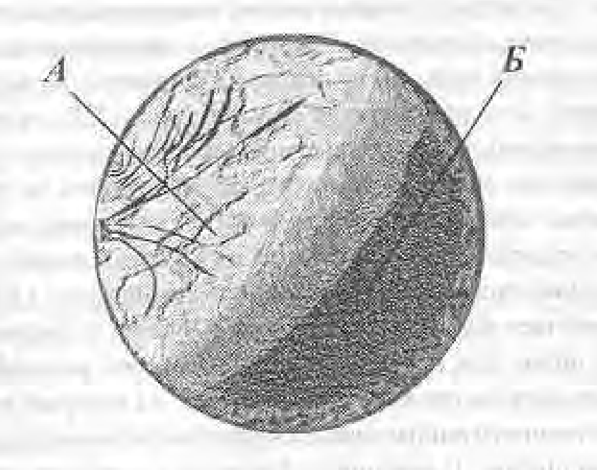


Рис. 17.1.

Поэтому вначале разрушение при переменных напряжениях объясняли перерождением или кристаллизацией материала, делающих его хрупким. Исследования показали, что механические свойства и микроструктура материала около места усталостного разрушения такие же, как и до нагружения детали.

Хрупкое разрушение, по виду очень похожее на усталостное, получается в крупнозернистой зоне при статическом изгибе образца из пластичного материала с острым надрезом. В вершине надреза возникает объемное напряженное состояние, и развитие пластических деформаций здесь затруднено. При переменных напряжениях первоначальная трещина становится причиной возникновения объемного напряженного состояния аналогично надрезу. Таким образом, одной из причин хрупкого характера разрушения в зоне *Б* является трехосное напряженное состояние материала, возникающее на границе трещины.

Усталостное разрушение происходит, как правило, без заметной пластической деформации детали.

17.3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При эксплуатации конструкции испытывают действие нагрузок случайного характера. Но чаще напряжения в деталях машин и элементах конструкций представляют собой периодическую функцию

времени. По периодическому закону напряжения могут изменяться и при постоянной нагрузке. Например, напряжение изгиба в поперечном сечении вала, нагруженного постоянной по величине и сохраняющей свое направление силой F (рис. 17.2), за время одного поворота является и растягивающим и сжимающим.

Испытания образцов на усталость проводятся на специальных установках. Наиболее простой является установка, предназначенная для испытаний на переменный изгиб с вращением при симметричном циклическом изменении напряжений (рис. 17.2). Здесь образец работает как консольная балка. Образец *1* закрепляется в патроне *2* шпинделя, вращающегося с некоторой угловой скоростью. На конце образца посажен подшипник *3*, на который действует сила F постоянного направления. Образец испытывает изгиб с симметричным циклом. В сечении *А-А* образца в наиболее опасной точке *Б* действует растягивающее напряжение σ, так как консоль изгибается выпуклостью вверх. После того как образец повернется на половину оборота, точка *Б* окажется внизу и напряжение в этой точке станет $-\sigma$. В момент нахождения на уровне оси напряжение в точке *Б* будет равно нулю.

Имеются также машины, в которых образец работает на переменный чистый изгиб как двухопорная балка.

Совокупность изменений напряжений за один полный период при установившемся режиме нагружения образца (детали) называется **циклом напряжений.**

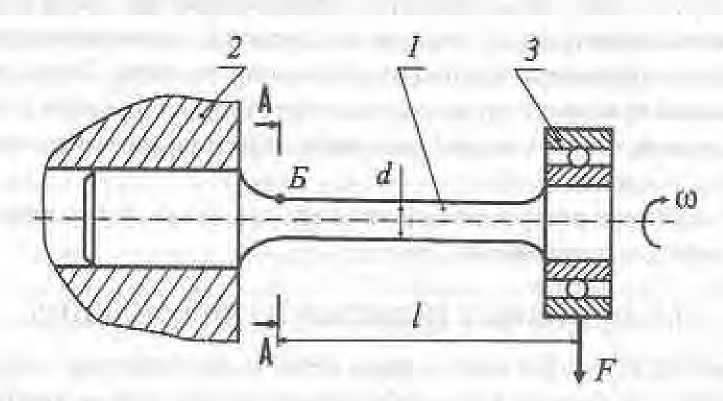


Рис. 17.2.

Глава 17. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ НАПРЯЖЕНИЯХ

Если максимальное значение напряжений (σ_{max} или τ_{max}) и минимальное значение напряжений (σ_{min} или τ_{min}) равны по значению, но противоположны по знаку, то цикл называется *симметричным* (рис. 17.3, а). Если же максимальные и минимальные напряжения не равны между собой, то цикл называется *асимметричным* (рис. 17.3, б, в).

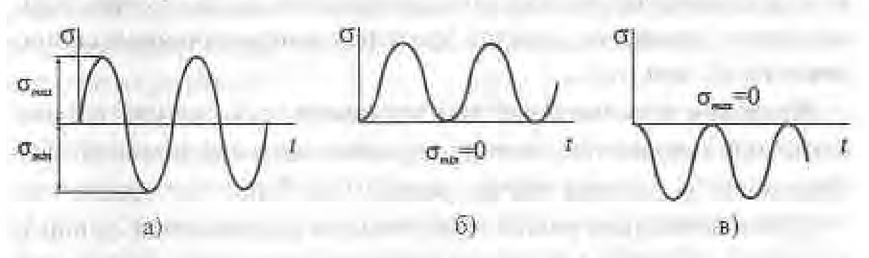


Рис. 17.3.

Степень асимметрии цикла характеризуется **коэффициентом асимметрии**

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \tag{17.1}$$

Цикл, где $\sigma_{min} = 0$ называется отнулевым (пульсационным) (см. рис. 17.3, б).

Форма цикла переменной нагрузки незначительно влияет на сопротивление усталостному разрушению.

Коэффициент асимметрии симметричного цикла $R = -1$, а для отнулевого цикла $R = 0$.

Величина

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \tag{17.2}$$

называется **амплитудой цикла,** а величина

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \tag{17.3}$$

— **средним напряжением цикла**.

Экспериментально установлено, что число циклов, при котором происходит разрушение, зависит не только от величины максимального напряжения, но и от амплитуды. Чем больше σ_a, тем быстрее наступит разрушение. Поэтому из всех циклов наиболее опасным для деталей является симметричный

Также установлено, что для многих материалов существует такое значение максимального напряжения, зависящее от степени асимметрии цикла, при котором материал выдерживает неограниченное число циклов.

Наибольшее абсолютное значение напряжения цикла, при котором не происходит усталостного разрушения за бесконечно большое число циклов, называется **пределом неограниченной выносливости:** σ_R **или** $(\sigma_R)_\infty$.

Пределом ограниченной выносливости $(\sigma_R)_{N_б}$ называется максимальное напряжение, соответствующее заданной (базовой) долговечности $N_б$, которая обычно равна 10^6, 10^7 или $5\cdot10^7$ циклов.

Пределы неограниченной выносливости обозначаются σ_R или τ_R с указанием в индексе значения коэффициента асимметрии цикла, для которого эти величины определялись. Так, σ_{-1} и τ_{-1} — пределы выносливости при симметричном цикле, а σ_0 и τ_0 — пределы выносливости при отнулевом цикле.

17.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ

Предел выносливости материала определяется путем испытания идентичных образцов при различных значениях σ_{max}, но при неизменном коэффициенте асимметрии R. По результатам испытаний определяют число циклов, при котором происходит разрушение каждого образца.

Для этого используется партия из 10…30 образцов круглого сечения диаметром 7…10 мм. Во избежание концентрации напряжений образцам придается плавная форма, а поверхность тщательно шлифуется или полируется (рис. 17.4).

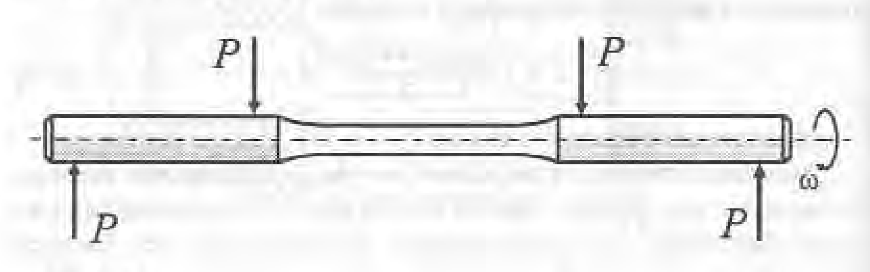


Рис. 17.4.

По результатам испытаний строится кривая усталости. По оси ординат откладывается σ_{max} — максимальное напряжение цикла, при котором испытывался образец, а по оси абсцисс — число циклов N, которое выдержал образец перед разрушением.

На каждом уровне напряжений σ_{max} испытывается несколько образцов, и по результатам испытаний определяется среднее значение разрушающего числа циклов. Различные виды кривых усталости приведены на рис. 17.5.

Кривые усталости образцов из большинства конструкционных сталей и легких (алюминиевых, магниевых и титановых) сплавов, асимптотически приближаются к горизонтальной прямой (рис. 17.5, а). Отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат, определяет предел неограниченной выносливости материала σ_R или τ_R при данном коэффициенте асимметрии цикла R.

Иногда кривые усталости строят в полулогарифмических или двойных логарифмических координатах, откладывая по оси абсцисс $\lg N$, а по оси ординат — максимальное напряжение цикла σ_{max} или $\lg\sigma_{max}$ (рис. 17.5, б).

Для деталей машин и натурных элементов конструкций, не существует такого числа циклов, выдержав которые образец не разрушается при дальнейшем испытании, поэтому их кривые усталости не имеют горизонтальной асимптоты (рис. 17.5, в).

В таких случаях можно говорить лишь о пределе ограниченной выносливости.

Для сталей предел ограниченной выносливости, определенный для $N_б = 10^7$ циклов, можно принять за предел выносливости, так как если стальной образец выдержал 10^7 циклов, то он может вы-

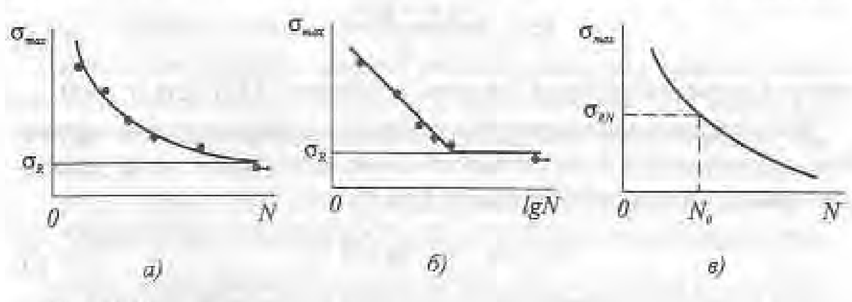


Рис. 17.5.

держать практически неограниченное число циклов. Для цветных металлов предел выносливости определяется при $N_б = 5 \cdot 10^7 \ldots 10^8$ циклов.

При оценке прочности и ресурса элементов конструкций необходимо располагать **уравнением кривой усталости**. Применительно к сплавам на железной основе хорошее соответствие экспериментальным данным при симметричном цикле нагружения в широком диапазоне долговечности имеет уравнение Стромейра:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N + B)^{-\alpha} \qquad (17.4)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = \lg a - \alpha \cdot \lg(N + B), \qquad (17.5)$$

где σ_{-1}, a, B, α — параметры.

Значение параметра B для многих материалов лежит в пределах от 0 до $5 \cdot 10^4$ циклов и его не учитывают, если минимальная долговечность образцов превышает 10^5 циклов. В этом случае

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N)^{-\alpha} \qquad (17.6)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = \lg a - \alpha \cdot \lg(N). \qquad (17.7)$$

Для аналитического описания левой ветви кривой усталости для указанных материалов используют степенное уравнение

$$\sigma_a^{\ m} \cdot N = d \qquad (17.8)$$

или

$$\lg \sigma_a = \frac{\lg d - \lg N}{m}, \qquad (17.9)$$

которое является частным случаем уравнения (17.6) для $\sigma_{-1} = 0$.

Для описания сопротивления усталости деформируемых титановых, алюминиевых и магниевых сплавов, используют также уравнение кривой усталости Степнова М. Н.:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + c \cdot (\lg N)^{-\beta}. \qquad (17.10)$$

Для гладких и надрезанных образцов различных типоразмеров

из деформируемых алюминиевых сплавов, а также для натурных элементов конструкций параметр β в уравнении (17.10) считают постоянным и равным $\beta = 2$. Для аналитического описания левой ветви кривой усталости при отсутствии необходимости экстраполяции опытных данных в область малых $N < 10^5$ и больших $N > 10^7$ долговечностей используют уравнение

$$\sigma_a = c \cdot (\lg N)^{-\beta}, \qquad (17.11)$$

полученное из уравнения (17.10) для $\sigma_{-1} = 0$.

Результаты экспериментальных исследований показывают, что пределы выносливости одного и того же материала при растяжении и кручении меньше предела выносливости при изгибе. Например, при симметричном цикле предел выносливости при растяжении равен

$$(\sigma_{-1})_p = (0{,}7 \ldots 0{,}8)\sigma_{-1}, \qquad (17.12)$$

а при кручении

$$\tau_{-1} = (0{,}4 \ldots 0{,}7)\sigma_{-1}, \qquad (17.13)$$

где σ_{-1} — предел выносливости при изгибе. В справочной литературе обычно приводятся значения σ_{-1}, полученные по результатам испытаний на переменный изгиб.

Многочисленные исследования проведены для установления связи предела выносливости σ_{-1} с другими механическими характеристиками материала, которые показали, что для сталей

$$\sigma_{-1} \approx 0{,}5\sigma_B,$$

для цветных металлов

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}25 \ldots 0{,}5)\sigma_B,$$

где σ_B — предел прочности материала.

Данные соотношения следует рассматривать как ориентировочные. Они показывают, что предел выносливости для некоторых цветных металлов почти в четыре раза меньше предела прочности.

17.5. ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ АСИММЕТРИИ ЦИКЛА НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТНОМУ РАЗРУШЕНИЮ

Предел выносливости материала зависит от степени асимметрии цикла. Это видно из **диаграммы предельных амплитуд**, где по оси

абсциссе откладывается значение среднего напряжения цикла σ_m, а по оси ординат — предельное значение амплитуды цикла σ_a (рис. 17.6).

Если для построения диаграммы предельных амплитуд не имеется достаточного числа экспериментальных точек, то ее строят приближенно. Такая приближенная или схематизированная диаграмма предельных амплитуд представлена на рис. 17.7. Начальный участок диаграммы заменяется прямой, проходящей через две точки: первая соответствует предельному симметричному циклу ($\sigma_a = \sigma_{-1}$, $\sigma_m = 0$), вторая — предельному отнулевому циклу ($\sigma_a = \sigma_m = \sigma_0/2$).

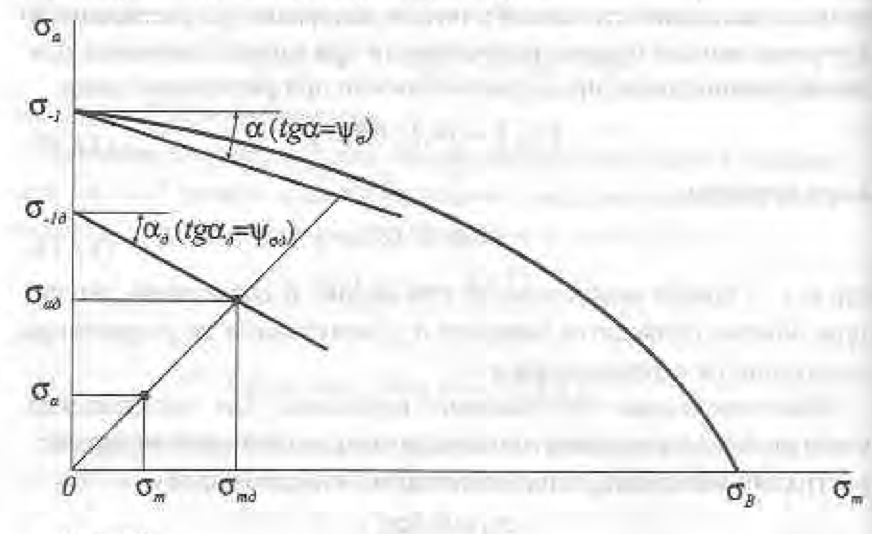


Рис.17.6.

Схематизация была предложена С. В. Серенсеном и Р. С. Кинасошвили.

Тангенс угла наклона верхней прямой к оси абсцисс служит количественной оценкой влияния среднего напряжения на предельную амплитуду:

$$\operatorname{tg}\alpha = \psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \qquad (17.14)$$

где ψ_σ — коэффициент чувствительности к асимметрии цикла.

Ниже приведены ориентировочные значения ψ_σ для некоторых материалов.

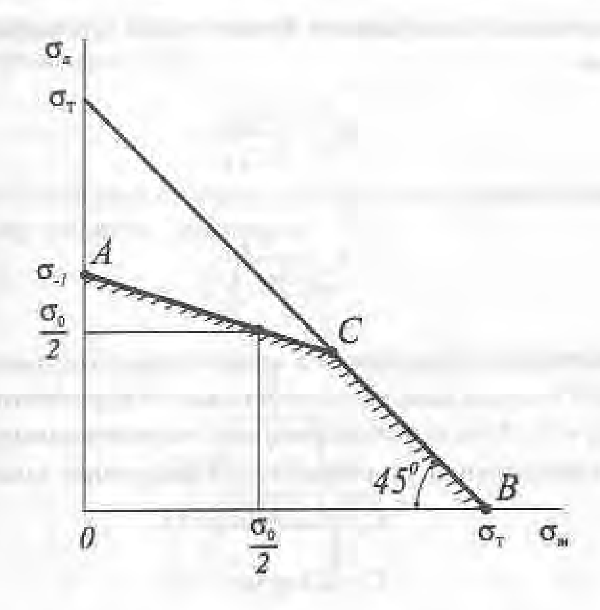


Рис.17.7.

Стали: низкой прочности $\psi_\sigma = 0{,}05\ldots0{,}15$, средней прочности $\psi_\sigma = 0{,}15\ldots0{,}25$, высокой прочности $\psi_\sigma = 0{,}25\ldots0{,}35$. Алюминиевые сплавы $\psi_\sigma = 0{,}25\ldots0{,}35$. Титановые сплавы $\psi_\sigma = 0{,}4\ldots0{,}5$.

17.6. ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И МАСШТАБНОГО ФАКТОРА НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТНОМУ РАЗРУШЕНИЮ

В отличие от постоянных во времени напряжений при переменных нагрузках концентрация напряжений вызывает снижение предела выносливости деталей, выполненных не только из хрупких, но и из пластичных материалов.

Влияние концентрации напряжений на предел выносливости зависит от чувствительности материала к концентрации напряжений и при расчете учитывается *эффективным коэффициентом концентрации*, т.е. отношением предела выносливости σ_{-1} образца без концентратора напряжений к пределу выносливости $(\sigma_{-1})_к$ образца с концентратором напряжений, выполненных из одного материала и имеющих такие же поперечные размеры рабочей части.

Эффективный коэффициент концентрации для нормальных напряжений

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_k}, \quad (17.15)$$

для касательных

$$K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(\tau_{-1})_k}. \quad (17.16)$$

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений больше единицы и обычно меньше теоретических коэффициентов концентрации α_σ и α_τ. Между эффективными и теоретическими коэффициентами концентрации устанавливаются следующие зависимости:

$$K_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1), \quad (17.17)$$

$$K_\tau = 1 + q_\tau(\alpha_\tau - 1), \quad (17.18)$$

где q_σ, q_τ — коэффициенты чувствительности материала к концентрации напряжений, которая зависит от свойств материала и возрастает с повышением предела прочности. Поэтому применение высокопрочных материалов при переменных нагрузках не всегда целесообразно.

Ниже приведены ориентировочные значения q_σ для некоторых материалов.

Стали: низкой прочности q_σ = 0,2...0,4, средней прочности q_σ = 0,4...0,6, высокой прочности q_σ = 0,6...0,8. Алюминиевые сплавы q_σ = 0,7...0,9. Титановые сплавы q_σ = 0,9...1,0.

Коэффициент чувствительности зависит также от размеров детали и ее формы. Поэтому в расчетах целесообразно пользоваться эффективными коэффициентами, найденными экспериментальным путем. Необходимо отметить, что концентрация напряжений может быть обусловлена не только формой детали, но и наличием внутренней неоднородности и трещин. Например, чешуйки графита в чугуне являются источниками такой концентрации напряжений, которая значительно выше значений от внешних концентраторов.

Для оценки влияния концентрации напряжений на предел выносливости вводится также понятие *градиента напряжений*.

Градиентом напряжений G в данной точке сечения называется

тангенс угла наклона θ касательной, проведенной к эпюре напряжений в этой точке (рис. 17.8):

$$\operatorname{tg}\theta = G = \frac{d\sigma}{dx}.$$

Относительный максимальный градиент напряжений в зоне концентрации определяется уравнением

$$\overline{G}_{\max} = \frac{G_{\max}}{\sigma_{\max}}. \quad (17.19)$$

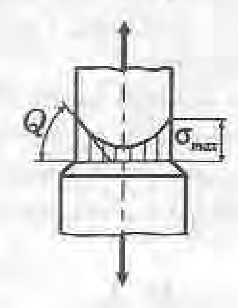


Рис. 17.8.

Градиент напряжений характеризует скорость убывания напряжений по мере удаления от места концентрации напряжений. Чем выше градиент, напряжений тем в меньшем объеме материала концентрируются высокие напряжения, тем меньше зерен материала приходится на этот объем и тем меньше вероятность образования здесь усталостной трещины.

Поэтому чувствительность материала к концентрации напряжений несколько уменьшается с увеличением градиента напряжений. При одном и том же $\sigma_{\max}$ градиент напряжений уменьшается с увеличением размеров поперечного сечения. При изгибе образцов максимальный градиент напряжений $G_{\max} = 2\sigma_{\max}/d$, а при центральном растяжении—сжатии градиент напряжений равен нулю. Этим частично объясняются меньшие значения пределов выносливости при центральном растяжении—сжатии, чем при изгибе образцов из одного и того же материала.

С увеличением абсолютных размеров поперечных сечений детали предел выносливости понижается.

Масштабный эффект объясняется металлургическим фактором, связанным со снижением механических свойств металла с ростом размеров отливки или поковки, так как при этом возрастает неоднородность металла, ухудшается прокаливаемость при термообработке и т.д.

Технологический фактор обусловлен образованием остаточных напряжений в поверхностных слоях при механической обработке детали, которые по-разному влияют на предел выносливости деталей больших и малых размеров.

Статистический фактор связан с тем, что в деталях больших размеров больше вероятность попадания структурных дефектов в область повышенных напряжений.

Влияние масштабного фактора на предел выносливости учитывается в расчетах коэффициентом ε_σ, который представляет собой отношение предела выносливости гладкого образца данного диаметра D к пределу выносливости стандартного образца диаметром d (7…10 мм):

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_D}{\sigma_{-1}}. \qquad (17.20)$$

На рис. 17.9 показана зависимость коэффициента ε_σ от диаметра d для сталей.

Необходимо иметь в виду, что, если эффективные коэффициенты концентрации взяты из графиков, в которых уже учтен масштабный фактор, вносить поправку на размеры детали не надо.

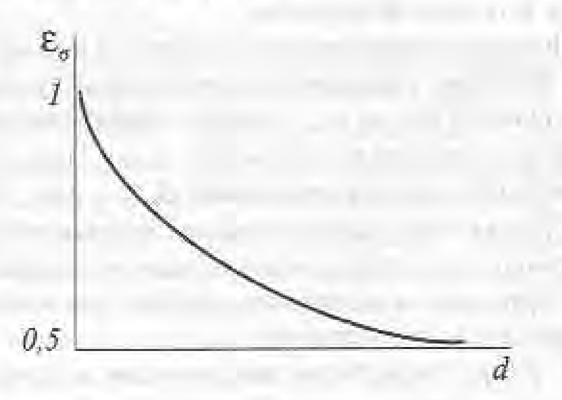


Рис. 17.9.

Профессором В.П. Когаевым и академиком С.В. Серенсеном разработана *теория подобия усталостного разрушения*, которая позволяет расчетным методом определить совместное влияние концентрации напряжений и масштабного эффекта, как отношение предела выносливости лабораторного образца σ_{-1} к пределу выносливости детали $\sigma_{-1д}$ при симметричном цикле изменения напряжений:

$$\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1д}} = \frac{2\alpha_\sigma}{1+10^{\nu_\sigma\left(1{,}946-\lg\frac{L}{\bar{G}}\right)}}, \qquad (17.21)$$

где α_σ — теоретический коэффициент концентрации для первого главного напряжения в зоне концентрации рассчитываемой детали; L — часть периметра опасного поперечного сечения детали, в котором действуют максимальные напряжения; $\bar{G}$ — относительный максимальный градиент первого главного напряжения в зоне концентрации детали; $\lg L/\bar{G}$ — параметр подобия детали; ν_σ — справочная характеристика материала детали, ориентировочные значения которой приведены ниже.

Углеродистые стали 0,1…0,18, легированные стали 0,04…0,12, алюминиевые сплавы 0,09…0,2.

17.7. ВЛИЯНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТИ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТНОМУ РАЗРУШЕНИЮ

На поверхности детали почти всегда имеются риски от обработки резцом, мелкие царапины, следы коррозии и т. п., которые являются концентраторами напряжений. Дефекты поверхности приводят к снижению сопротивления усталости детали. Установлено, что предел выносливости образцов с полированной поверхностью выше, чем шлифованных, а шлифованных выше, чем обработанных резцом, и т. д.

Влияние шероховатости поверхности на предел выносливости оценивается *коэффициентом состояния поверхности* K_F, который равен отношению предела выносливости образца с заданной обработкой поверхности к пределу выносливости такого же образца, но с хорошо отшлифованной поверхностью:

$$K_F = \frac{(\sigma_{-1})_F}{\sigma_{-1}}. \qquad (17.22)$$

На рис. 17.10 приведена зависимость коэффициента K_F от предела прочности материала для различных видов обработки поверхности.

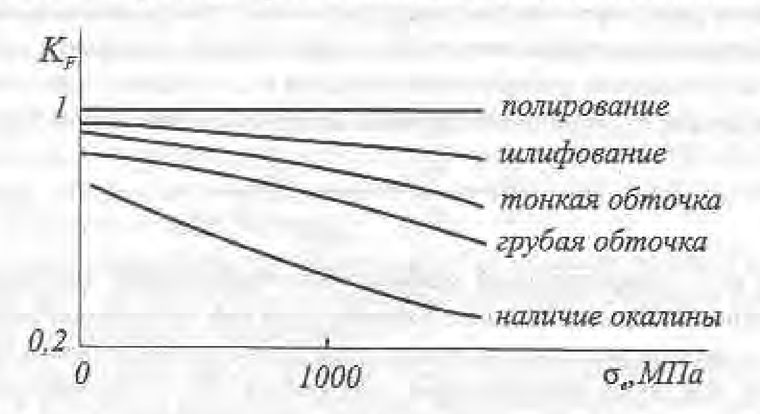


Рис. 17.10.

Необходимо отметить, что применение некоторых технологических методов упрочнения поверхности детали при правильном их выполнении приводит к значительному повышению ее сопротивления усталости. К таким методам относятся:

а) наклеп поверхностного слоя путем обдувки дробью, накатки роликом;

б) цементация, азотирование и цианирование поверхностного слоя;

в) закалка токами высокой частоты.

Влияние технологических факторов на усталостную прочность оценивается *коэффициентом поверхностного упрочнения* K_V.

Положительное влияние технологической обработки поверхностного слоя детали связано, в первую очередь, с созданием в этом слое остаточных сжимающих напряжений, наличие которых затрудняет развитие усталостных трещин. В результате сопротивление усталости детали повышается.

Остаточные напряжения сжатия при таком распространенном способе повышения сопротивления усталости детали, как наклеп ее поверхности, вызывается большим пластическим деформированием поверхностного слоя при обдувке стальной дробью или прокатке роликами.

Кроме того, пластическое деформирование повышает упругие свойства материала и сглаживает различного рода царапины, задиры на поверхности детали, являющиеся концентраторами напряжений.

При закалке токами высокой частоты и азотировании также создаются значительные сжимающие напряжения в поверхностном слое детали.

Такие часто применяемые покрытия стальных деталей, как никелирование и хромирование, заметно снижают предел выносливости детали, хотя и не влияют на их статическую прочность, причем снижение сопротивления усталости тем больше, чем толще слой хрома или никеля. Объясняется это наличием значительных остаточных растягивающих напряжений в поверхностном слое после хромирования и никелирования. Аналогичное явление имеет место и при покрытии поверхности стальной детали слоем меди.

17.8. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТНОМУ РАЗРУШЕНИЮ

Металлы, находясь в контакте с газообразной или жидкой средой, подвергаются коррозии. Коррозия является причиной высокой концентрации напряжения. Особенно интенсивно коррозия развивается при растягивающих напряжениях.

При переменных нагрузках коррозия существенно снижает сопротивление усталости особенно легких сплавов. Снижение предела выносливости из-за коррозии тем больше, чем высокопрочнее сталь.

Степень снижения сопротивления усталости зависит от агрессивности внешней среды. Например, морская вода больше снижает долговечность, чем пресная.

Влияние коррозионной среды учитывается в расчетах коэффициентом

$$\beta = \frac{(\sigma_{-1})_{кор}}{\sigma_{-1}}, \qquad (17.23)$$

где $(\sigma_{-1})_{кор}$ — предел выносливости при наличии агрессивной среды.

Средствами борьбы с влиянием внешней среды являются различного рода антикоррозионные покрытия.

17.9. СУММАРНАЯ КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ УСТАЛОСТИ

Суммарный коэффициент, учитывающий влияние концентрации напряжений, масштабного и технологических факторов определяется уравнением

$$K_{\sigma D}=\left(\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma}+\frac{1}{K_F}+\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{1}{K_V}. \qquad (17.24)$$

17.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ ПРОСТОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

При переменных нагрузках обычно делается проверочный расчет на прочность, причем за основу для определения запаса прочности принимается схематизированная диаграмма предельных амплитуд (рис. 17.7), которая строится по результатам испытаний стандартных образцов диаметром 7...10 мм без концентраторов напряжений со шлифованной или полированной поверхностью. Поэтому при расчете должно быть дополнительно учтено влияние на сопротивление усталости детали всех указанных выше факторов.

Так как концентрация напряжений, масштабный фактор и состояние поверхности мало сказываются на прочности деталей из пластического материала при постоянных напряжениях, принято коэффициенты концентрации и состояния поверхности, а также масштабный фактор относить к переменной составляющей цикла σ_a.

Предположим, что при возрастании нагрузок коэффициент асимметрии не изменяется, т. е. будем предполагать пропорциональный рост амплитуды и увеличение среднего напряжения рабочего цикла вплоть до наступления предельного состояния.

На рисунке 17.8 кривая линия представляет собой действительную диаграмму предельных амплитуд. Верхняя прямая линия аппроксимирует кривую диаграммы предельных амплитуд для лабораторных образцов, нижняя прямая – для детали. Точка A (σ_m, σ_a) определяет рабочий цикл действующих на деталь напряжений, а точка B ($\sigma_{m\partial}$, $\sigma_{a\partial}$) определяет предельную амплитуду для детали.

Глава 17. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ НАПРЯЖЕНИЯХ

Эти точки в соответствии с принятым допущением лежат на одном луче. Коэффициент запаса определяется уравнением

$$n_\sigma=\frac{\sigma_{a\partial}}{\sigma_a}=\frac{\sigma_{m\partial}}{\sigma_m}. \qquad (17.25)$$

В соответствии с принятой схематизацией диаграммы предельных амплитуд прямыми линиями имеем:

$$\sigma_{a\partial}=\sigma_{-1\partial}-\psi_{\sigma\partial}\sigma_{m\partial},\ \sigma_{-1\partial}=\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}},\ \psi_{\sigma\partial}=\frac{\psi_\sigma}{K_{\sigma D}}. \qquad (17.26)$$

Подставляя соотношения (17.26) в (17.25), получим:

$$n_\sigma\,\sigma_a=\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}}-\frac{\psi_\sigma}{K_{\sigma D}}n_\sigma\,\sigma_m, \qquad (17.27)$$

откуда после несложных преобразований получается формула для коэффициента запаса:

$$n_\sigma=\frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}\,\sigma_a+\psi_\sigma\,\sigma_m}. \qquad (17.28)$$

В случае кручения запас прочности n_τ определяется аналогично. Расчетные формулы можно получить путем замены в выражениях (17.25)—(17.28) σ на τ и K_σ на K_τ.

При совместном действии переменного изгиба и переменного кручения или в случае растяжения-сжатия и кручения для расчета на прочность С.В. Серенсеном и Р.С. Кинасошвили было получено уравнение

$$n=\frac{n_\sigma\,n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}, \qquad (17.29)$$

где n_σ — запас прочности при действии одних только нормальных напряжений; n_τ — запас прочности при действии одних только касательных напряжений; n — запас прочности при совместном действии и нормальных и касательных напряжений и синхронном их изменении.

Пример 17.1. Определить коэффициент запаса усталостной прочности для вала с галтелью (рис. 17.11), подверженного действию переменного изгиба с кручением.

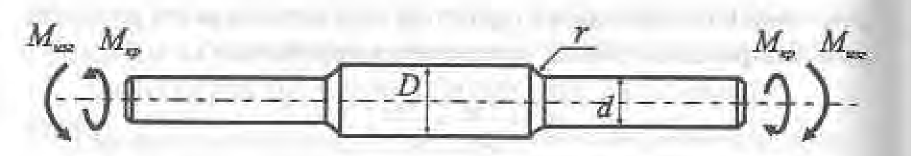


Рис. 17.11.

Дано: $\sigma_{-1} = 400$ МПа, $\tau_{-1} = 200$ МПа, $M_{изг} = \pm 5\cdot10^3$ Н·м, $M_{кр} = 2\cdot10^3 \pm 4\cdot10^3$ Н·м, $D = 100$ мм, $d = 95$ мм, r = 5 мм, $K_{\sigma D} = 4{,}11$, $K_{\tau D} = 3{,}11$, $\psi_\sigma = 0{,}2$, $\psi_\tau = 0{,}1$.

Амплитуды и средние значения циклов нормальных и касательных напряжений определяются по формулам:

$$\sigma_a = \frac{M_{изг}}{W_{ос}} = \frac{5\cdot10^3}{\pi\cdot d^3/32} = \frac{5\cdot10^3\cdot32}{3{,}14\cdot95^3\cdot10^{-9}} = 60\ \text{МПа};\ \sigma_m = 0;$$

$$\tau_a = \frac{M_{кра}}{W_p} = \frac{4\cdot10^3}{\pi d^3/16} = \frac{4\cdot10^3\cdot16}{3{,}14\cdot95^3\cdot10^{-9}} = 24\ \text{МПа};$$

$$\tau_m = \frac{M_{крm}}{W_p} = \frac{2\cdot10^3\cdot16}{3{,}14\cdot95^3\cdot10^{-9}} = 12\ \text{МПа};$$

Коэффициенты запаса определяются по формулам:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}\,\sigma_a + \psi_\sigma\,\sigma_m} = \frac{400}{4{,}11\cdot60 + 0{,}2\cdot0} = 1{,}62,$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}\,\tau_a + \psi_\tau\,\tau_m} = \frac{220}{3{,}11\cdot24 + 0{,}1\cdot12} = 2{,}90,$$

$$n = \frac{n_\sigma\, n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1{,}62\cdot2{,}9}{\sqrt{1{,}62^2 + 2{,}9^2}} = 1{,}41.$$

17.11. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЖЕННОСТИ

Определение долговечности при нерегулярном нагружении выполняется по следующей схеме. На первом этапе устанавливаются характеристики уровня нагруженности детали или элемента конструкции в виде функции распределения амплитуд эксплуатационных напряжений. В общем случае широкополосного процесса схематизацию случайного процесса для построения функции распределения амплитуд напряжений, эквивалентных случайному процессу по степени усталостного повреждения, выполняют одним из методов: максимумов, экстремумов, размахов, полных циклов, «дождя» и др.

При расчете на прочность при нерегулярной переменной нагруженности используют *гипотезы накопления повреждений*.

Например, корректированная линейная гипотеза накопления усталостных повреждений имеет вид:

$$a_p = \int\limits_{\sigma_a} \frac{dn(\sigma_a)}{N(\sigma_a)}, \tag{17.30}$$

где $dn(\sigma_a)$ — число циклов действия данной амплитуды переменных напряжений σ_a за срок службы $N_{0,5}$; $N(\sigma_a)$ — долговечность до разрушения или до образования трещины заданного размера при действии амплитуды σ_a (определяется по кривой усталости детали); a_p — корректированная сумма повреждений при действии всех повреждающих амплитуд переменных напряжений.

Значение $dn(\sigma_a)$ определяется в зависимости от вида функции распределения действующих напряжений по формуле

$$dn(\sigma_a) = N_{0,5}\, dF(\sigma_a), \tag{17.31}$$

где $dF(\sigma_a)$ — элементарная вероятность попадания амплитуд в бесконечно малый диапазон

$$dF(\sigma_a) = f(\sigma_a)d\sigma_a, \tag{17.32}$$

где $F(\sigma_a)$ и $f(\sigma_a)$ — функции распределения и плотности распределения действующих переменных амплитуд соответственно.

Профессором В.П. Когаевым получена формула для определения величины a_p, которая зависит от особенностей спектра эксплуатационной переменной нагрузки:

$$a_p = \frac{\xi - u}{\sigma_{a\max} - u}, \qquad (17.33)$$

где $\sigma_{a\max}$ — максимальная амплитуда действующих напряжений; u — предел выносливости образца бесконечно большого диаметра или предельное повреждающее напряжение, принимаемое равным приблизительно половине предела неограниченной выносливости гладких лабораторных образцов стандартного размера:

$$u = 0{,}5\sigma_{-1\infty}, \qquad (17.34)$$

$$\xi = \frac{\int\limits_{u}^{\sigma_{a\max}} f(\sigma_a)\sigma_a \, d\sigma_a}{\int\limits_{u}^{\sigma_{a\max}} f(\sigma_a) \, d\sigma_a}. \qquad (17.35)$$

Интегрирование в формуле (17.30) ведется по всем амплитудам вплоть до максимальной амплитуды действующего спектра или блока нагружения, превышающим предел неограниченной выносливости материала детали или элемента конструкции $\sigma_{-1\infty}$, а в формуле (17.35) — по амплитудам, превышающим предельное повреждающее напряжение u. Схема расчета долговечности до разрушения показана на рис. 17.12.

Окончательная формула для определения оценки среднего срока службы детали или долговечности до разрушения (образования трещины заданного размера) с учетом формул (17.30)—(17.35) будет иметь вид

$$N_{0,5} = \frac{a_p}{\int\limits_{\sigma_{-1\infty}}^{\sigma_{a\max}} \frac{f(\sigma_a)\,d\sigma_a}{N(\sigma_a)}}. \qquad (17.36)$$

Таким образом, для определения средней долговечности при нерегулярном переменном нагружении необходимо, во-первых, знать функцию распределения действующих напряжений, которая оценивается по результатам анализа спектра эксплуатационной переменной нагрузки одним из известных методов схематизации (метод размаха, максимумов, полных циклов и т.п.), во-вторых, иметь кривую

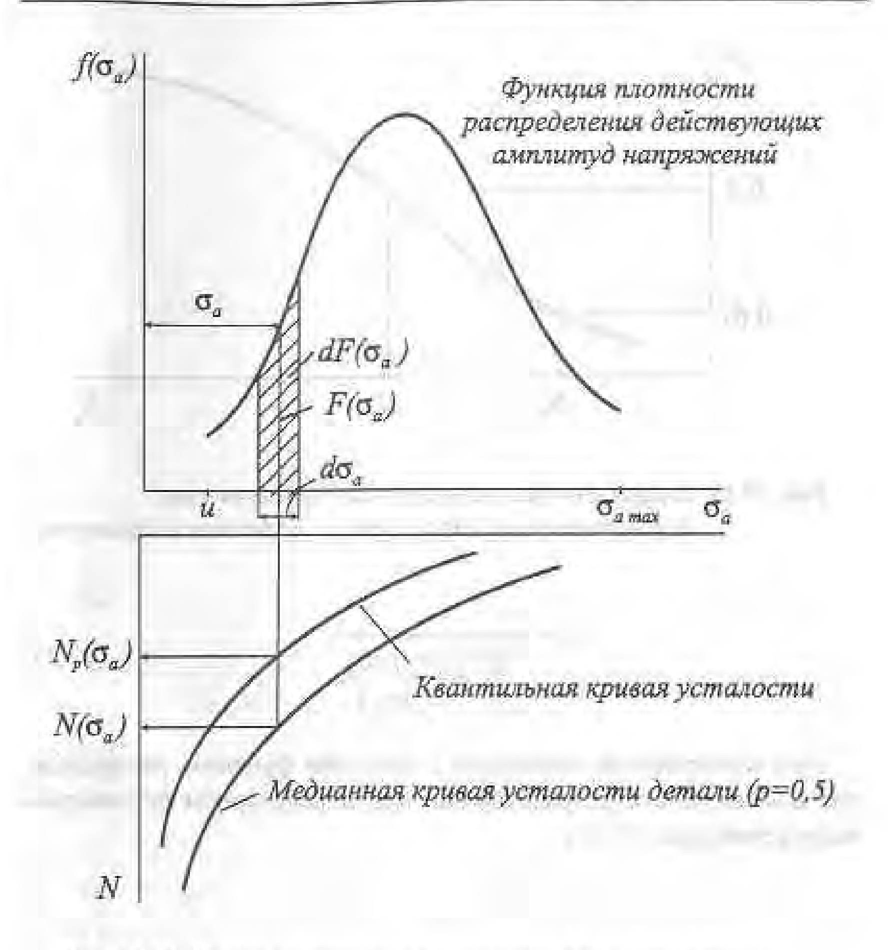


Рис. 17.12. *Схема к расчету долговечности при нерегулярном переменном нагружении*

усталости детали при регулярном переменном нагружении для определения долговечности [знаменатель формулы (17.36)].

Для оценки долговечности при нерегулярном нагружении, соответствующей вероятности разрушения p, в формуле (17.36) вместо медианной ($p = 0{,}5$) долговечности $N(\sigma_a)$ используют долговечность $N_p(\sigma_a)$ (квантиль долговечности), соответствующую вероятности p, которая определяется по кривой усталости заданной вероятности разрушения (квантильной кривой усталости) (рис. 17.13):

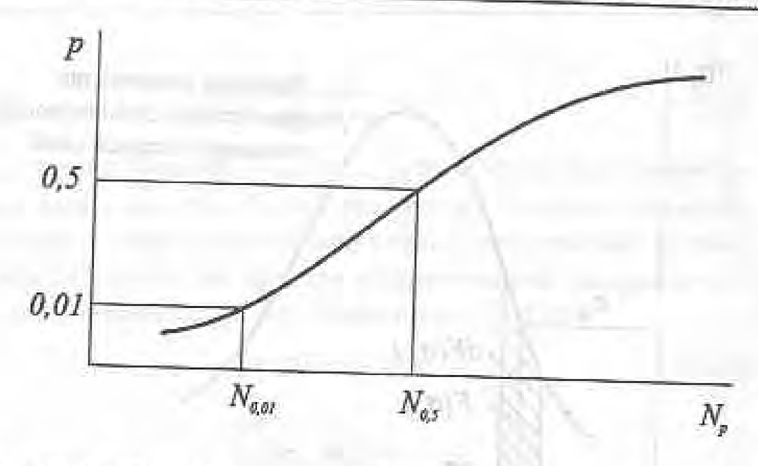


Рис. 17.13. *График функции распределения долговечности до разрушения при нерегулярном переменном нагружении*

$$N_p = \frac{a_p}{\int\limits_{\sigma_{-1\infty}}^{\sigma_{a\max}} \frac{f(\sigma_a)d\sigma_a}{N_p(\sigma_a)}}. \tag{17.37}$$

При варьировании величиной p получим функцию распределения долговечности до разрушения при нерегулярном переменном нагружении (рис. 17.13).